ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН 2025, № 1, с. 20–29

## МЕХАНИКА МАШИН

*УДК 534.1; 539.3.*

# ВЛИЯНИЕ ПРИСОЕДИНЕННОЙ МАССЫ ТРАНСПОРТИРУЕМОЙ ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СРЕДЫ НА ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРУБОПРОВОДА С ВИБРИРУЮЩИМИ ОПОРАМИ

**© 2025 г. М. М. Шакирьянов[1, *], А. А. Юлмухаметов[1]**

[1]*Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Россия*
**e-mail: shakmar9@mail.ru*

Поступила в редакцию 20.05.2024 г.
После доработки 15.10.2024 г.
Принята к публикации 20.10.2024 г.

Исследованы пространственные колебания трубопровода с вибрирующими опорами. По трубопроводу транспортируется газожидкостная среда кольцевой структурной формы течения. Учитывается перетекание частиц газожидкостной смеси в поперечных сечениях ускоренно движущегося трубопровода. Дан сравнительный анализ результатов вычислений, полученных из аналитического решения линеаризованных и численного моделирования нелинейных уравнений установившихся изгибно-вращательных колебаний трубы. Показано влияние внутренней присоединенной массы транспортируемого продукта на величины собственных частот первой формы изгибных и угловых колебаний трубопровода.

*Ключевые слова*: трубопровод, газожидкостная среда, постоянное давление, присоединенная масса, вибрации опор, пространственные колебания

**DOI:** 10.31857/S0235711925010037, **EDN:** EQRGEO

Трубопроводы широко применяются в оборудовании энергетики, нефтехимии, в аэрокосмической технике и многих других машинах и аппаратах. Основная функция трубопроводов — транспортировка жидких и газообразных сплошных сред. Особенность их эксплуатации состоит в том, что они испытывают кроме силы веса динамические растягивающую, сжимающую и изгибную нагрузки, давление сред на обе поверхности. Колебания упругих тонкостенных оболочек и труб, контактирующих с жидкостью и газом, изучались в [1]. Общие вопросы механики гибких трубопроводов и шлангов рассматривались в [2]. Большое внимание уделялось надежной, безопасной и бесшумной работе трубопроводов в [3, 4]. Проблеме динамического поведения упругих тонкостенных труб, транспортирующих жидкие или газообразные сплошные среды, посвящено большое количество работ. Обширный обзор литературы по данной теме приведен, например, в [5]. К последнему также можно добавить обзор [6] за 2020–2022 гг. Здесь ограничимся кратким обзором исследований по влиянию окружающей и транспортируемой сред на колебания трубопровода. В [7] изучено влияние малой сосредоточенной массы на частоты и формы свободных изгибных колебаний круговой цилиндрической оболочки. Динамическое поведение трубопровода при действии внутреннего ударного давления рассмотрено в [8]. Нелинейной пространственной динамике изгиба трубопровода, транспортирующего сплошную среду, посвящена работа [9]. На основе изгибно-вращательной модели в [10, 11] изучены пространственные колебания трубопровода в внешней сплошной среде под действием переменного внутреннего давления. Рассмотрены периодические и непериодические колебания трубы. В [12] определены численные значения присоединенных масс в зависимости от относительного расстояния между свободной поверхностью воды и верхней частью трубопровода. Влияние перетекания газожидкостной смеси в поперечных сечениях трубопровода на его нелинейные колебания в одной плоскости изучалось в [13].

**Цель** настоящей статьи состоит в исследовании влияния присоединенной массы газожидкостной среды цилиндрической формы течения на пространственные колебания трубопровода с вибрирующими опорами.

**Постановка задачи.** Рассматриваются пространственные колебания участка кругового цилиндрического трубопровода с заключенной в нем газожидкостной средой относительно прямой, проходящей через опоры (рис. 1). Труба с внутренним радиусом $R$, толщиной $h$ стенки и массой $m$ прикреплена к опорам с помощью идеальных сферических шарниров. Расстояние $L$ между концевыми сечениями трубопровода сохраняется неизменным. Учитываются взаимодействия внутреннего давления и кривизны осевой линии, продольной и поперечной деформаций трубы. Предполагается, что транспортируемая среда в поперечном сечении имеет кольцевую форму течения: газовая фаза кругового сечения радиуса $R_1$ движется внутри жидкой круговой цилиндрической фазы, контактирующей с внутренней поверхностью трубопровода. При этом скоростной напор считается малым по сравнению с постоянным внутренним давлением $p_1$. Пренебрегается действиями сил трения потока и продольных сил инерции трубы. Кроме того, малыми предполагаются деформации кручения, которые связаны с выходом оси трубы из плоскости изгиба. В начальном положении трубопровод, изогнутый силами гравитации и внутреннего давления, находится в покое. В момент времени $t = 0$ опоры начинают совершать поступательные вибрационные движения $s(t)$, направленные перпендикулярно плоскости рисунка. Далее происходит установление пространственных колебаний трубопровода. Для их исследования используется изгибно-вращательная модель [9]. В ней пространственные колебания трубы рассматриваются как совокупность относительных изгибных перемещений $w_*(x, t)$ в одной плоскости, переносных угловых поворотов $\theta(t)$ плоскости изгиба и поступательных движений $s(t)$ опор.

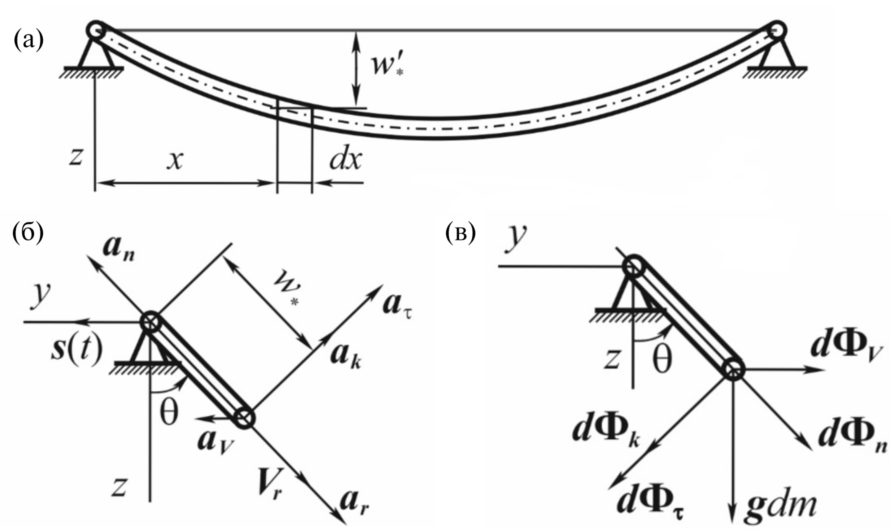


**Рис. 1.** Расчетная схема трубопровода.

Расчетная схема трубопровода представлена на рис. 1. Рисунок состоит из трех фрагментов: на фрагменте (рис. 1а) изображены элемент трубопровода длиной $dx$ и проекция $w' = w\cos\theta$ его прогиба на вертикальную плоскость $xOz$; на фрагменте (рис. 1б) — кориолисово $\mathbf{a}_c$, относительное $\mathbf{a}_r$, переносные вибрационное $\mathbf{a}_v$, касательное $\mathbf{a}_\tau$ и нормальное $\mathbf{a}_n$ ускорения; на фрагменте (рис. 1в) — гравитационная сила $d\boldsymbol{P}$ и силы инерции элемента: $d\boldsymbol{\Phi}_c$, $d\boldsymbol{\Phi}_r$, $d\boldsymbol{\Phi}_V$, $d\boldsymbol{\Phi}_\tau$, $d\boldsymbol{\Phi}_n$ — Кориолиса, относительная, переносные вибрационная, касательная и нормальная. Приведенные в [9] выражения ускорений элемента трубопровода массы $dm$ и действующих на него сил имеют вид

$$a_c = 2\dot{\theta}\dot{w}_*,\ a_r = \ddot{w}_*,\ a_V = \ddot{s},\ a_\tau = w_*\ddot{\theta},\ a_n = w_*\dot{\theta}^2,\ d\Phi_c = a_c dm,\ d\Phi_r = a_r dm,$$
$$d\Phi_V = a_V dm,\ d\Phi_\tau = a_\tau dm,\ d\Phi_n = a_n dm,\ dm = m_1 dx,\ m_1 = \rho F + \eta\left(\rho_1 F_1 + \rho_2 F_2\right),$$
$$F = \pi\left[\left(R+h\right)^2 - R^2\right],\ F_1 = \pi R_1^2,\ F_0 = \pi R^2,\ F_2 = F_0 - F_1, \tag{1}$$
$$\eta = \frac{\rho_2\left[\rho_1 + \rho_2 - (\rho_2 - \rho_1)\zeta\right]}{\left[\rho_1 + \rho_2 + (\rho_2 - \rho_1)\zeta\right]\left[\rho_2 - (\rho_2 - \rho_1)\zeta\right]},\ \zeta = \frac{R_1^2}{R^2}.$$

Здесь и далее точки над буквами обозначают производные по времени; $\rho$, $\rho_1$, $\rho_2$ — плотности материала трубы, газовой и жидкой фаз транспортируемой среды; параметр $\zeta$ определяет объем газа, содержащегося в общем объеме транспортируемой газожидкостной среды; $m_1$ — эффективная масса трубопровода единичной длины с заключенной в нем газожидкостной смесью; $\eta$ — коэффициент, учитывающий перетекание частиц жидкой фазы в поперечных сечениях ускоренно движущейся трубы [14].

Движение тела, частично заполненного жидкой или газожидкостной средой, с переменной скоростью может вызвать возмущенные движения частиц среды. Эти возмущенные движения частиц в свою очередь могут изменить как поле сил давления среды на контактной поверхности трубы, так и ее динамические характеристики (эффективную массу, собственные частоты колебаний, деформации трубы). Подобное явление, в частности, будет иметь место при плоских поперечных вибрациях оси трубопровода, транспортирующего двухфазную газожидкостную среду цилиндрической формы течения. При этом, если считать, что транспортируемая среда сохраняет свою цилиндрическую форму и течет только в продольном направлении, то ускорения центров масс элементов трубы и содержащейся в ней среды будут геометрически равными. Тогда по теореме о движении центра масс механической системы трубопровод — газожидкостная среда проекция равнодействующей силы сопротивления среды на трубопровод равна взятому со знаком минус произведению массы этой среды на ускорение центра масс системы. При одновременном продольном и поперечном течениях газожидкостной смеси в трубе, когда действие внешних сил на систему остается неизменным, перетекание частиц в поперечных сечениях происходит в сторону, противоположную направлению ускорения трубопровода. Поэтому модуль ускорения элемента газожидкостной среды уменьшается, а модуль ускорения элемента трубы увеличивается. В результате проекция равнодействующей силы сопротивления среды движению трубопровода уменьшается. Выражение проекции этой силы получено в [14] и имеет вид

$$\Phi_z = -\eta\left(\rho_1 F_1 + \rho_2 F_2\right)a. \tag{2}$$

В случае $\rho_1 \ll \rho_2$, из (2) следует $\eta = \left(1+\zeta\right)^{-1}$. Кроме того, при значениях параметра $\zeta = 0,\ 1$ и плотностей $\rho_1$, $\rho_2 \neq 0$ коэффициент $\eta = 1$. В первом случае труба полностью заполнена только жидкостью, а во втором — газом. При $0 < \zeta < 1$ величина коэффициента $\eta$ меньше единицы, т.е. в случае заполнения трубы двухфазной газожидкостной средой отмеченное выше перетекание частиц всегда имеет место. По аналогии с выражением проекции силы сопротивления окружающей среды на трубу коэффициент $\eta\left(\rho_1 F_1 + \rho_2 F_2\right)$ при ускорении $a$ в (2) можно назвать эффективной внутренней присоединенной массой транспортируемой среды. Таким образом, в отсутствии сил сопротивления окружающей среды эффективная масса трубопровода равна сумме его массы и эффективной внутренней присоединенной массы газожидкостной среды.

Дифференциальное уравнение вращений трубы вокруг прямой, проходящей через опоры, запишется как [15]

$$-\int\limits_{(m)} w_* \sin\theta\, dP - J_p\ddot{\theta} - \int\limits_{(m)} w_* d\Phi_\tau - \int\limits_{(m)} w_* d\Phi_c + \int\limits_{(m)} w_* \cos\theta d\Phi_V = 0,$$
$$J_p = 2\rho L J, 4J = \pi\left[\left(R+h\right)^4 - R^4\right], dP = m_{10} g dx, m_{10} = \rho F + \rho_1 F_1 + \rho_2 F_2. \qquad (3)$$

Изгибные колебания трубы в одной плоскости описываются дифференциальным уравнением [8]

$$\ddot{w}_* dm = -EJ\frac{\partial^4 w_*}{\partial x^4}dx - \left[F_0 p_1(1-2\nu) - \alpha\int\limits_0^L\left(\frac{\partial w_*}{\partial x}\right)^2 dx\right]\frac{\partial^2 w_*}{\partial x^2}dx + m_{10} g\cos\theta dx +$$
$$+ d\Phi_n + d\Phi_V \sin\theta, \quad \alpha = \pi E h R L^{-1}, \qquad (4)$$

где $E$, $\nu$ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала трубы.

Аппроксимирующая функция прогиба, которая удовлетворяет условиям шарнирного крепления трубы к опорам, принимается по первой основной форме

$$w_* = \left[W_0 + w(t)\right]\sin\beta x, \quad \beta = \pi L^{-1}, \qquad (5)$$

где $W_0, w(t)$ — амплитуды статической и динамической составляющих прогиба средней точки пролета.

Вибрационные движения обеих опор происходят с равными амплитудами $s_0$, частотами $f$, нулевыми фазами и задаются в виде

$$s = s_0 \sin\Omega t, \ \Omega = 2\pi f. \qquad (6)$$

**Метод решения.** Подставляя функции (5), (6) в уравнения (3), (4) и применяя в последнем метод Бубнова–Галеркина, получаем

$$\ddot{\theta}\left[\left(W_0 + w\right)^2 + \frac{4\rho J}{m_1}\right] + 2\left[\frac{2}{\pi}\left(\frac{m_{10}}{m_1}g\sin\theta + s_0\Omega^2\sin\Omega t\ \cos\theta\right) + \dot{\theta}\dot{w}\right]\left(W_0 + w\right) = 0,$$
$$\ddot{w} + \frac{\beta^4 EJ}{m_1}\left(W_0 + w\right) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{m_{10}}{m_1}g\cos\theta - s_0\Omega^2\sin\Omega t\sin\theta\right) + \left(W_0 + w\right)\dot{\theta}^2 + \qquad (7)$$
$$+ \frac{\beta^2}{m_1}\left[F_0(1-2\nu)p_1 - \frac{\alpha\beta^2 L}{2}\left(W_0 + w\right)^2\right]\left(W_0 + w\right).$$

Начальные условия для системы дифференциальных уравнений (7) имеют вид

$$\theta = 0, \quad \dot{\theta} = 0, \quad w = 0, \quad \dot{w} = 0 \quad (t = 0). \qquad (8)$$

Для определения статической составляющей прогиба $W_0$ во втором уравнении системы (7) полагаем $\theta(t) \equiv 0,\ w(t) \equiv 0,\ s_0 = 0.$ В итоге получаем

$$\frac{\alpha\beta^4 L}{2}W_0^3 + \beta^4 EJ(1-p)W_0 - \frac{4m_{10}g}{\pi} = 0,\ p = \frac{p_1}{p_*},\ p_* = \frac{\beta^2 EJ}{F_0(1-2\nu)}. \qquad (9)$$

В настоящей статье решение (9) определялось численно с применением математического пакета Maple.

Нелинейная задача Коши (7) с нулевыми начальными условиями (8) решается численно методом Рунге–Кутта.

Принимая приближения

$$\left(W_0 + w\right)^2 \approx W_0^2, \ \sin\theta \approx \theta, \ \cos\theta \approx 1, \tag{10}$$

линеаризуем уравнения (7) относительно переменных $w(t), \theta(t)$. После несложных преобразований имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered}\ddot{\theta} + k_2^2\theta = -\frac{s_0\Omega^2 k_2^2}{g}\sin\Omega t, \quad \ddot{w} + k_1^2 w = -\frac{4s_0\Omega^2}{\pi}\theta\sin\Omega t,\\ k_1^2 = \frac{\beta^4}{m_1}\left[EJ(1-p) + 3\frac{\alpha L}{2}W_0^2\right], \quad k_2^2 = \frac{4m_{10}gW_0}{\pi\left(m_1 W_0{}^2 + 4\rho J\right)},\end{gathered} \tag{11}$$

где $k_1$, $k_2$ — собственные частоты колебаний трубы.

Из (11) можно также определить значения собственных частот изгибных $k_{10}$ и угловых $k_{20}$ колебаний без учета перетекания частиц жидкости в поперечных сечениях трубы. Для этого значение единичной эффективной массы $m_1$ (1) трубы следует заменить значением $m_{10}$ (3).

Нерезонансное решение (11) с начальными условиями (8) имеет вид [15]

$$\begin{gathered}\theta(t)=\delta\left(\frac{\Omega}{k_2}\sin k_2 t - \sin\Omega t\right), \ w(t)=\frac{2\delta s_0\Omega^2}{\pi}\left\{\frac{1-\cos k_1 t}{k_1^2} + \frac{\cos k_1 t - \cos 2\Omega t}{k_1^2 - 4\Omega^2} + \right.\\ \left. + \frac{\Omega}{k_2}\left[\frac{\cos(\Omega + k_2)t - \cos k_1 t}{k_1^2 - (\Omega + k_2)^2} - \frac{\cos(\Omega - k_2)t - \cos k_1 t}{k_1^2 - (\Omega - k_2)^2}\right]\right\},\\ \delta = \frac{s_0\Omega^2 k_2^2}{g\left(k_2^2 - \Omega^2\right)}, \ k_2 \neq \Omega, \ k_1 \neq 2\Omega, \ k_1 \neq \Omega + k_2, \ k_1 \neq \Omega - k_2.\end{gathered} \tag{12}$$

**Входные параметры. Единицы измерения переменных.** Программа вычислений для ЭВМ, составленная авторами, основана на применении математического пакета Maple. С ее помощью определяются искомые величины и строятся необходимые для анализа графические зависимости. Числовые расчеты проводились для стальной, титановой и композитной труб с размерами: $L = 4.5$ м, $R = 0.05$ м, $h = 0.002$ м. Механические характеристики и плотности материалов труб принимали следующие значения. Стальная труба: $E = 2\cdot10^5$ МПа, $\nu = 0.3$, $\rho = 7800$ кг/м$^3$. Титановая труба: $E = 1.18\cdot10^5$ МПа, $\nu = 0.35$, $\rho = 4500$ кг/м$^3$. Композитная труба (эффективные характеристики): $E = 0.433\cdot10^5$ МПа, $\nu = 0.4$, $\rho = 2000$ кг/м$^3$. Гравитационное ускорение: g = 9.81 м/с$^2$. Частота и относительная амплитуда колебаний опор: $f = 20$ Гц, $s_0/R = 0.02$. Газовая и жидкая фазы транспортируемого продукта — соответственно метан и жидкость с плотностями $\rho_1 = 0.717$ кг/м$^3$ и $\rho_2 = \gamma\rho_0$, где $\rho_0 = 1000$ кг/м$^3$ — плотность воды. Внутренние давления $p_0$ в трубах принимались равными 3, 9 МПа. Результаты вычислений в виде графических зависимостей приведены на рис. 2–5. Переменные на графиках измеряются: время $t$ — в секундах (с), статический и динамический прогибы $W_0$, $w$ — в метрах (м), угол — в радианах (рад), частота $f$ — в Герцах (Гц).

**Зависимость собственных частот изгибных и угловых колебаний труб от плотностей и объемных частей газовой и жидкой фаз.** Практический интерес представляют значения отношений собственных частот изгибных $f_1/f_{10}$ и угловых $f_2/f_{20}$ колебаний, полученных с учетом и без учета движений частиц жидкости в поперечных сечениях трубы. Эти отношения определяются из выражений (11) для квадратов циклических частот изгибных и угловых колебаний. Имеем

$$\frac{f_1}{f_{10}} = \sqrt{\frac{m_{10}}{m_1}},\quad \frac{f_2}{f_{20}} = \sqrt{\frac{m_{10}W_0^{\,2} + 4\rho J}{m_1 W_0^{\,2} + 4\rho J}},\ f_1 = \frac{k_1}{2\pi},\ f_{10} = \frac{k_{10}}{2\pi},\ f_2 = \frac{k_2}{2\pi},\ f_{20} = \frac{k_{20}}{2\pi}. \tag{13}$$

Из (13) видно, что отношение $f_1/f_{10}$ собственных частот изгибных колебаний равно корню квадратному из отношения невозмущенной и эффективной масс смеси. Можно также видеть, что отношение $f_2/f_{20}$ собственных частот угловых колебаний имеет более сложный вид: в общем случае оно зависит не только от значений масс $m_{10}$, $m_1$, но и от величины $w_0$ статической составляющей прогиба средней точки пролета трубопровода. Графические зависимости указанных отношений частот от относительной плотности $\gamma = \rho_2/\rho_0$ жидкой фазы при $p_0 = 9$ МПа, $\zeta = 0.81$, приведены на рис. 2, а от отношения $\zeta$ объема газовой фазы к общему объему транспортируемой среды — на рис. 3.

Из рис. 2, 3 видно, что на всех графиках сплошная *1*, штриховая *2* и штрихпунктирная *3* линии в перечисленном порядке расположены одна над другой. Такая

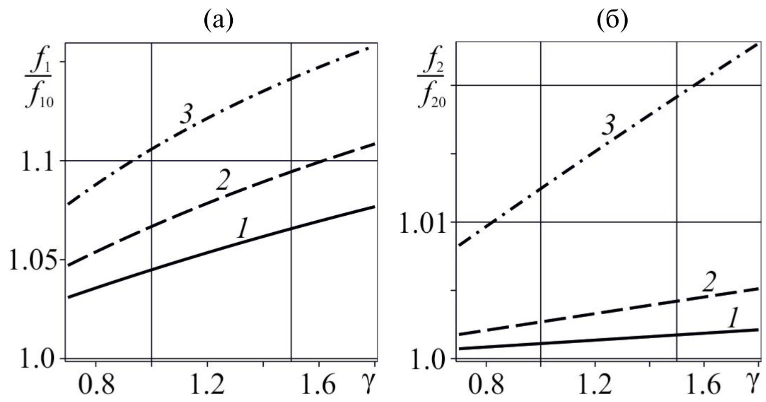


**Рис. 2.** Зависимости отношений собственных частот изгибных $f_1/f_{10}$ (а) и угловых $f_2/f_{20}$ (б) колебаний труб от относительной плотности $\gamma = \rho_2/\rho_0$ жидкой фазы:
*1* — стальная, *2* — титановая, *3* — композитная трубы.

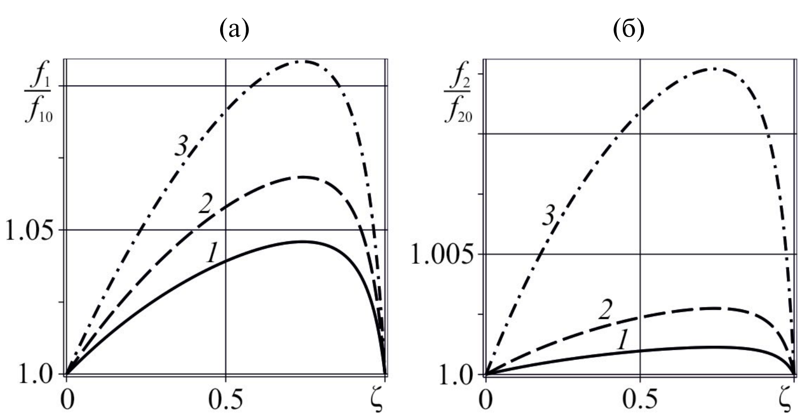


**Рис. 3.** Зависимости отношений собственных частот изгибных $f_1/f_{10}$ (а) и угловых $f_2/f_{20}$ (б) колебаний труб от параметра $\zeta = R_1^{\,2}/R^2$: *1* — стальная, *2* — титановая, *3* — композитная трубы.

закономерность объясняется различием масс стальной, титановой и композитной труб. Кроме того, можно видеть (рис. 2), что с увеличением относительной плотности $\gamma$ жидкой фазы среды отношения собственных частот изгибных $f_1/f_{10}$ и угловых $f_2/f_{20}$ колебаний трубы растут.

При увеличении относительной плотности $\gamma$ жидкой фазы от значений 0.7 до 1.8 рост указанных отношений частот для стальной, титановой, композитной труб соответственно равен: 4.7 и 0.02%, 6.1 и 0.04%, 8.0 и 0.26%. Графические зависимости отношений $f_1/f_{10}$ и $f_2/f_{20}$ от параметра $\zeta$, представленные на рис. 3, имеют следующие отличия от кривых предыдущего рис. 2. Во-первых, отношения частот $f_1/f_{10}$ и $f_2/f_{20}$ равны единице: эти два значения параметра $\zeta$ соответствуют заполнению труб только жидкостью или газом. Во-вторых, все кривые на рис. 3 имеют максимумы. Максимальные приращения отношений $f_1/f_{10}$ и $f_2/f_{20}$ для стальной, титановой и композитной труб соответственно равны: 7.66 и 0.03%, 10.8 и 0.095%, 15.8 и 0.72%. Обобщая отмеченные результаты, можно сделать вывод о том, что при принятых входных данных собственные частоты колебаний труб зависят как от их материалов, так и от плотностей и объемов газовой и жидкой частей транспортируемой среды. При этом, если собственные частоты угловых колебаний изменяются незначительно, то изменения собственных частот изгибных колебаний труб могут быть значительными.

**Пространственные колебания труб с учетом влияния эффективной присоединенной массы транспортируемой среды, внутреннего давления и вибраций опор.** Графические зависимости угловых $\theta$ и относительных изгибных $w/R$ перемещений от времени $t$ для значения $s_0/R = 0.02$ относительной амплитуды вибраций опор с частотой $f = 20$ Гц приведены на рис. 4, 5. При этом наибольшие величины вибрационных ускорений опор равны 15.8 м/с$^2$. На графиках сплошными линиями представлены результаты решения задачи Коши (7), (8) численным методом Рунге–Кутта, а пунктирными — вычислений по решениям (12) линеаризованных уравнений (11) в отрезке времени $1.0 \leqslant t \leqslant 4.0$ с. На рис. 4, 5 строки графиков сверху вниз соответствуют давлениям $p_0 = 3.0$, 9.0 МПа в транспортируемой среде, а столбцы (а), (б), (в) графиков — к стальному, титановому и композитному трубопроводам. Для этих давлений значения собственных частот изгибных $f_1$ ($f_{10}$) и угловых $f_2$ ($f_{20}$) колебаний (Гц) труб представлены в табл. 1.

**Таблица 1.** Собственные частоты изгибных и угловых колебаний труб

| Материал трубы | $p^*$, МПа | $p_0$, МПа | $f_1$, Гц | $f_{10}$, Гц | $f_2$, Гц | $f_{20}$, Гц |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Сталь | 25.9 | 3 | 12.19 | 11.59 | 0.4360 | 0.4360 |
| | | 9 | 10.22 | 9.784 | 0.5277 | 0.5276 |
| Титановый сплав | 19.3 | 3 | 11.10 | 10.29 | 0.5338 | 0.5337 |
| | | 9 | 8.558 | 8.022 | 0.7080 | 0.7077 |
| Стекловолокно | 11.2 | 3 | 8.471 | 7.486 | 0.8854 | 0.8840 |
| | | 9 | 5.628 | 5.090 | 1.5537 | 1.5347 |

Из сравнительного анализа числовых значений собственных частот, приведенных в табл. 1, а также соответствующих строк и столбцов графиков на рис. 4 и 5 можно отметить следующее. С увеличением внутреннего давления происходит уменьшение собственных частот изгибных колебаний труб. При этом собственные частоты угловых колебаний труб увеличиваются. Сказанное в большей степени относится к композитной трубе. Можно также констатировать уменьшение разницы между результатами численного моделирования и приближенного аналитического решения как угловых, так и изгибных колебаний труб. Следует подчеркнуть, что последнее утверждение находится в полном согласии с первым из приближений (10). Кроме

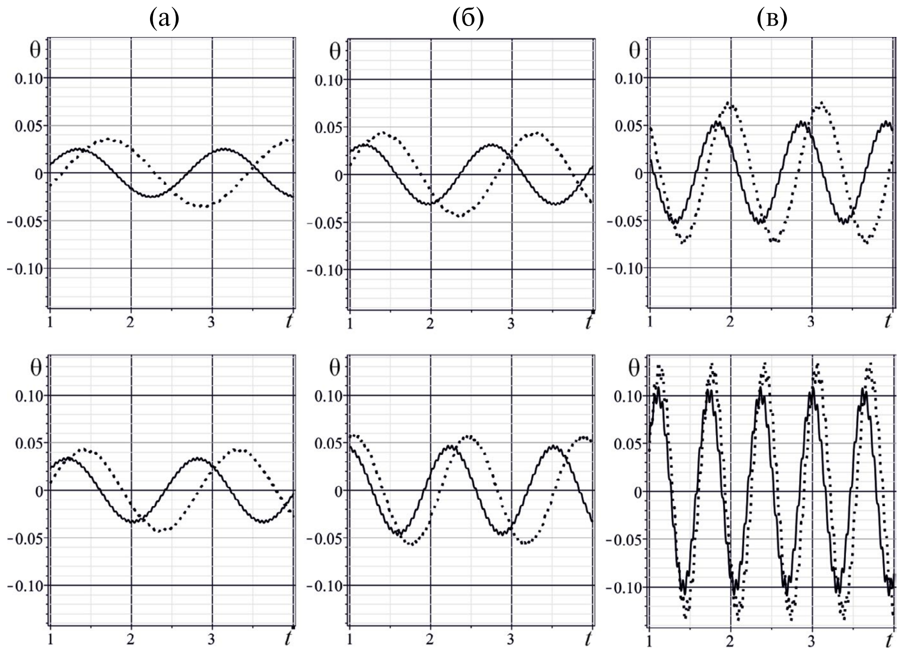


**Рис. 4.** Зависимости угла θ от времени $t$ стальной, титановой и композитной труб (столбцы (а), (б) и (в)) при $s_0/R = 0.02$, $f = 20$ Гц, $p_0 = 3$ МПа (верхняя строка), $p_0 = 9$ МПа (нижняя строка).

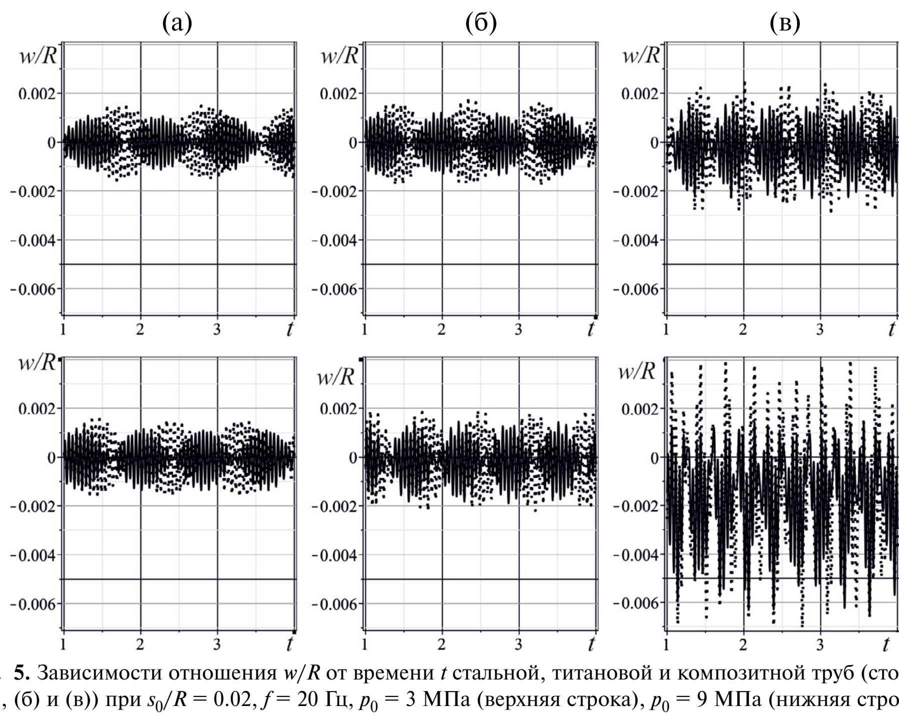


**Рис. 5.** Зависимости отношения $w/R$ от времени $t$ стальной, титановой и композитной труб (столбцы (а), (б) и (в)) при $s_0/R = 0.02$, $f = 20$ Гц, $p_0 = 3$ МПа (верхняя строка), $p_0 = 9$ МПа (нижняя строка).

того, из результатов вычислений также следует, что с увеличением амплитуды вибраций опор увеличиваются и амплитуды как угловых, так и изгибных колебаний труб.

**Заключение.** Исследование нелинейных пространственных колебаний участка трубопровода с вибрирующими опорами прежде всего имеет практический интерес. При этом применение изгибно-вращательной математической модели динамики трубопровода значительно упрощает задачу. Рассмотренная в работе транспортировка двухфазной газожидкостной смеси цилиндрической формы течения позволяет сформулировать следующие выводы.

Построены графические зависимости отношений $f_1/f_{10}$ и $f_2/f_{20}$ от объемного содержания $\zeta$ газовой и относительной плотности $\gamma$ жидкой фазы транспортируемой среды. С увеличением $\gamma$ отношения частот увеличиваются, а с увеличением $\zeta$ — сначала увеличиваются, достигают максимума и далее уменьшаются до единицы.

Показано, что при одном и том же внутреннем давлении собственные частоты изгибных колебаний, полученные с учетом и без учета перетекания частиц жидкости в поперечных сечениях труб, отличаются значительно. При этом собственные частоты угловых колебаний труб практически остаются неизменными.

Установлено, что с увеличением внутреннего давления происходит уменьшение собственных частот изгибных колебаний стальной, титановой и композитной труб. В этом случае собственные частоты угловых колебаний труб увеличиваются.

**Финансирование работы.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00106, https://rscf.ru/project/24-21-00106/

**Благодарности.** Авторы выражают благодарность М.А. Ильгамову за обсуждение работы.

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильгамов М.А.* Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 184 с.
2. *Светлицкий В.А.* Механика трубопроводов и шлангов. М.: Машиностроение, 1982. 280 с.
3. *Ганиев Р.Ф., Низамов Х.Н., Дербуков Е.И.* Волновая стабилизация и предупреждение аварий в трубопроводах. М.: Из-во МГТУ, 1996. 258 с.
4. *Ганиев Р.Ф.* Нелинейные резонансы и катастрофы. Надежность, безопасность и бесшумность. М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2013. 592 с.
5. *Li S., Karney B.W., Liu G.* FSI research in pipeline systems — A review of the literature // J. of Fluids and Structures. 2015. V. 57. P. 277–297.
6. *Шакирьянов М.М.* Обзор исследований лаборатории МТТ за 2020–2022 годы // Многофазные системы. 2022. Т. 17. № 1. С. 63–73.
7. *Серегин С.В.* Влияние присоединенной массы на динамические характеристики тонкой оболочки // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2015. № 4. С. 83–89.
8. *Ильгамов М.А.* Динамика трубопровода при действии внутреннего ударного давления // Изв. РАН, МТТ. 2017. № 6. С. 83–96.
9. *Ганиев Р.Ф., Ильгамов М.А., Хакимов А.Г., Шакирьянов М.М.* Пространственные колебания трубопровода в сплошной среде под действием переменного внутреннего давления // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 6. С. 3–13.
10. *Łuczko J., Czerwiński A.* Nonlinear three-dimensional dynamics of flexible pipes conveying fluids // J. of Fluids and Structures. 2017. V. 70. P. 235–260.
11. *Ганиев Р.Ф., Ильгамов М.А., Хакимов А.Г., Шакирьянов М.М.* Пространственные непериодические колебания трубопровода под действием переменного внутреннего давления // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2017. № 2. С. 3–12.
12. *Филиппова В.Р.* Автоматизированный расчет величины присоединенной массы жидкости при колебаниях трубопровода подводного перехода нефтепровода // Вестник науки и образования. 2020. № 15–2 (93). С. 5–8.

13. *Shakiryanov M. M., Yulmukhametov A. A.* Effect of an internal attached mass on nonlinear pipeline oscillations // J. Mach. Manuf. Reliab. 2020. V. 49 (9). P. 749–756.
14. *Шакирьянов М. М., Юлмухаметов А. А.* Внешняя и внутренняя присоединенные массы трубопровода // Известия Уфимского научного центра РАН. 2020. № 3. С. 12–16.
15. *Утяшев И. М., Шакирьянов М. М.* Пространственные колебания трубопровода с вибрирующими опорами // Изв. РАН. МТТ. 2023. № 4. С. 38–52.