МЕХАНИКА МАШИН

УДК 534.26

УПРОЩЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ВТОРИЧНОГО ПОЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В ЖИДКОСТИ

О. И. Косарев

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия
e-mail: kosarevoi@yandex.ru

Поступила в редакцию 02.04.2024 г.
После доработки 10.10.2024 г.
Принята к публикации 20.10.2024 г.

Предложен упрощенный метод расчета вторичного поля конечной цилиндрической оболочки, погруженной в жидкость, в дальней зоне. Дана сравнительная оценка составляющих полного поля, связанных с излучением, вызываемым колебаниями оболочки, и отражением звука от абсолютно твердого тела. Даны рекомендации для использования упрощенного метода.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, вторичное поле, звуковое давление, вынужденные колебания, отраженное поле

DOI: 10.31857/S0235711925010015, **EDN:** EQRQFX

Вторичное поле возникает в результате действия на оболочку падающего звукового поля, создаваемого внешним источником. В результате этого на оболочке возбуждаются колебания, в которых участвует присоединенная жидкость, и возникает рассеянное гидроакустическое поле. Рассеянное (дифрагированное) поле включает две составляющие: 1) повторно излученное поле, создаваемое колебаниями оболочки; 2) поле, отраженное от оболочки, как от абсолютно твердого тела.

Расчету вторичного поля посвящено сравнительно небольшое количество работ [1–15]. Из них наиболее близкими к рассматриваемой теме являются следующие работы. В работе [1] решена задача дифракции плоской звуковой волны на бесконечной импедансной оболочке в ближнем поле. В работе [2] решена задача первичного поля, т.е. излучения колеблющейся конечной цилиндрической оболочки под действием внутренних сил. Задача решена впервые в дальней зоне с использованием формулы Кирхгофа. Задача вынужденных колебаний оболочки не решалась, а перемещения задавались в виде гармонической функции. В работе [3] рассмотрена задача дифракции звука на конечном абсолютно твердом цилиндре в дальнем поле с использованием формулы Кирхгофа, в которой в качестве импеданса взят импеданс для бесконечного цилиндра. Вместо суммарного давления на поверхности оболочки взято только давление рассеянного поля и производная суммарного давления, вопреки требованию граничного условия, не приравненная к нулю.

Задача дифракции звука на твердом цилиндре, ограниченном по торцам полусферами, в дальнем поле решена методом функций Грина [4].

Численные методы решения предложены в ряде работ [4–7]. Однако применительно к цилиндру они неэффективны, т.к. по сложности и трудоемкости значительно превосходят аналитические методы. Одним из наиболее удобных численных методов является метод конечных элементов (МКЭ), реализуемый на базе программного комплекса ANSYS. В работе [7] проведен расчет рассеянного поля методом МКЭ на модели цилиндрической оболочки L = 10 м и a = 0.4 м. Дальнее поле определялось на расстоянии 3.6 м. В расчетной схеме модель оболочки была представлена 20 тыс., а жидкость — 180 тыс. элементами. В этой же работе сказано о невозможности расчета дальнего гидроакустического поля реальных подводных объектов методом МКЭ, поскольку количество элементов слишком велико и возрастает пропорционально кубу дистанции. В работе [8] приведен метод расчета вынужденных колебаний цилиндрических оболочек под действием сосредоточенных сил. В работе [9] изложена структура метода расчета вторичного поля цилиндрической оболочки в дальней зоне. Настоящая статья является продолжением работы [9] в части использования ее для разработки упрощенного метода. Поэтому здесь для удобства восприятия материала в отсутствии [9], некоторые формулы из [9] повторены.

Из проведенного обзора следует, что в опубликованных работах сведений об упрощенном методе не обнаружено. Обоснованием необходимости создания упрощенного метода является следующее. Как показали проведенные исследования на большей части частотного диапазона, точнее в средне — и высокочастотной областях, вклад во вторичное поле от собственных колебаний оболочки мал и им можно пренебречь.

Целью исследований является разработка упрощенного метода расчета вторичного поля цилиндрической оболочки в дальней зоне. Упрощение основано на сравнительной оценке вклада каждого из двух составляющих полного вторичного поля (вибрационной и отраженной от твердого тела) в величину полного поля.

Новизну определяют полученные новые сведения о свойствах и возможностях упрощенного метода.

Полезность — предложен более простой и менее трудоемкий метод расчета вторичного поля. Даны практические рекомендации по использованию упрощенного метода.

Рассматривается задача расчета вторичного звукового поля, создаваемого конечной упругой цилиндрической оболочкой, погруженной в жидкость, в дальней зоне. Граничные условия на концах (торцах) оболочки свободные. Рассеяние звуковых волн рассматривается на цилиндрической поверхности оболочки без учета концевых заглушек (плоских, сферических и др.). Первичным источником излучения звука является монополь с объемной скоростью V, находящийся на большом расстоянии H от оболочки.

Звуковое давление поля, падающего на оболочку под углом ψ к оси z оболочки, определяется формулой

$$p_0 = A_0\, e^{ikz\cos\psi} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(kr\sin\psi)\cos n\varphi, \quad A_0 = \frac{i\rho V_m e^{-ikH}}{2H}, \tag{1}$$

где принято $V_m = V/f$, f — частота колебаний. Амплитуда первичного источника излучения A_0, вызывающего колебания оболочки, принята постоянной по частоте.

Излучаемое поле, определяемое решением волнового уравнения в цилиндрических координатах (без суммирования гармоник), [9]

$$p_s = B_n H_n^{(2)}(r\sqrt{k^2 - k_z{}^2})\, e^{ik_z z}\cos n\varphi, \quad k_z = k\cos\theta, \quad \gamma = k_z = k\cos\theta, \tag{2}$$

где B_n — искомая функция; θ — угол направления волнового вектора распространения отраженной звуковой волны, угол наблюдения. Угол θ отсчитывается от оси z цилиндра. $H_n{}^{(2)}(\arg)$ — функция Ганкеля второго рода, в которой далее верхний индекс (2) опускаем.

Давление звукового поля p_s, рассеянного вблизи оболочки после определения коэффициента B_n с учетом граничных условий $\partial p/\partial r = \rho\omega^2 w(z)$

$$p_s = \left[\frac{\rho\omega^2 w(z) - k\sin A_0\, e^{ikz\cos\psi}\, \varepsilon_n i^n J_n{}'(ak\sin\psi)}{\sqrt{k^2-\gamma^2}\, H_n'\left(a\sqrt{k^2-\gamma^2}\right)} \right] H_n\left(r\sqrt{k^2-k_z{}^2}\right)\cos n\varphi. \quad (3)$$

Вторичное поле цилиндрической оболочки в дальней зоне определяется формулой Кирхгофа

$$p_N = \frac{1}{4\pi}\iint\left[p\frac{\partial G(N,A)}{\partial n} - \frac{\partial p}{\partial n}\,\mathrm{G(N,A)}\right]ds,$$
$$G(N,A) = \frac{\exp(-ikR_1)}{R_1}, \quad R_1 = |N,A|. \quad (4)$$

В результате проведенных преобразований формула (4) примет вид

$$P_N = -\left(\frac{e^{-ikR}}{R}\right)\frac{e^{\frac{i\pi n}{2}}}{2}\left[-\mu J_n{}'(\mu)\int_0^L p\,e^{ikz\cos\theta}dz + aJ_n(\mu)\int_0^L \frac{\partial p}{\partial r}e^{ikz\cos\theta}dz\right], \quad (5)$$

где $\mu = ak\sin\theta$; L — длина оболочки; $p = p_0 + p_s$ — полное поле на поверхности оболочки.

Для расчета по формуле (5) нужно знать виброперемещения $w(z)$ оболочки, которые в общем случае должны определяться из расчета вынужденных колебаний оболочки в жидкости. Такой расчет представляет собой достаточно сложную задачу и требует специального программного обеспечения.

Для каждой окружной гармоники n с учетом опущенной временной зависимости $e^i\omega^t$ уравнение вынужденных колебаний оболочки в жидкости можно представить в виде [8]

$$\begin{bmatrix} L_{11}+\omega_*^2 & L_{12} & L_{13} \\ -L_{12} & L_{22}+\omega_*^2 & L_{23} \\ -L_{13} & L_{23} & L_{33}+\omega_*^2 \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \frac{a}{q}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_0+p_s \end{Bmatrix}. \quad (6)$$

Полное решение уравнения (6) состоит из суммы общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения с правой частью, определяющей вынужденные колебания. Правой частью (возмущением) является полное звуковое поле на поверхности оболочки давление $p = p_0 + p_s$. Полное решение уравнения имеет вид

$$u = U\cos(n\varphi) + u_p, v = V\sin(n\varphi) + v_p, w = W\cos(n\varphi) + w_p,$$

$$U = \sum_{j=1}^{8} C_{jn}\frac{\Delta_{jn}^{(2)}}{\Delta_{jn}^{(1)}}\,e^{i\alpha_{jn}\xi},\ V = \sum_{j=1}^{8} C_{jn}\frac{\Delta_{jn}^{(3)}}{\Delta_{jn}^{(1)}}\,e^{i\alpha_{jn}\xi},\ W = \sum_{j=1}^{8} C_{jn}e^{i\alpha_{jn}\xi}, \quad (7)$$

где n — окружные гармоники ряда Фурье, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$; α_{jn} — корни дисперсионного уравнения; $j = 1$–8 — порядковые номера корней; C_{jn} — искомые коэффициенты; $\Delta^{(1)}{}_{j,n}$, $\Delta^{(2)}{}_{j,n}$, $\Delta^{(3)}{}_{j,n}$ — миноры матрицы уравнения колебаний оболочки (6); $\omega = 2\pi f$ — угловая частота колебаний.

С целью получения аналитического решения упростим полный точный расчет, ограничившись частным решением неоднородного уравнения вынужденных колебаний оболочки.

Суть упрощения заключается в том, что решение (7) уравнения колебаний оболочки (6) принимаем в виде

$$u = u_p, v = v_p, w = w_p.$$

В этом случае не требуется решать дисперсионное уравнение и определять для каждой гармоники n и для каждой частоты колебаний по восемь корней дисперсионного уравнения. С физической точки зрения это означает пренебрежение собственными колебаниями, определяемыми корнями дисперсионного уравнения (резонансами).

Обозначив матрицу в (6)

$$L_{i,j} = \begin{bmatrix} L_{11} + \omega_*^2 & L_{12} & L_{13} \\ -L_{12} & L_{22} + \omega_*^2 & L_{23} \\ -L_{13} & L_{23} & L_{33} + \omega_*^2 \end{bmatrix},$$

определим вектор перемещений

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = \frac{a}{q}\left[L_{i,j}\right]^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_0 + p_s \end{Bmatrix}.$$

Из него определим перемещения

$$W = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} a\left(p_0 + p_s\right),$$

где Δ_1 — минор; Δ_0 — определитель матрицы $L_{i,j}$;

$$\Delta_1 = \left(L_{11} + \omega_*^2\right)\left(L_{22} + \omega_*^2\right) + L_{12}^2;$$

$$\Delta_0 = \left(L_{11} + \omega_*^2\right)\left(L_{22} + \omega_*^2\right)\left(L_{33} + \omega_*^2\right) - L_{12}L_{23}L_{13} - L_{13}L_{12}L_{23} +$$

$$+L_{13}\left(L_{22} + \omega_*^2\right) L_{13} - \left(L_{11} + \omega_*^2\right) L_{23}^2 + L_{12}^2 L_{33}.$$

После подстановки выражений давления падающего поля p_0 и рассеянного поля p_s в уравнение (6) и проведения соответствующих преобразований решение получим в виде

$$w_p = \frac{A_0\ \varepsilon_n i^n \left[J_n(\eta) - \dfrac{\eta J_n'(\eta) H_n\left(\mu^*\right)}{\mu^* H_n'\left(\mu^*\right)}\right] e^{ikz\cos\psi}}{\dfrac{q}{a} Z_{\text{м}} - \dfrac{a\rho\omega^2 H_n\left(\mu^*\right)}{\mu^* H_n'\left(\mu^*\right)}}, \tag{8}$$

где $Z_{\text{м}} = \Delta_0/\Delta_1$ — механический импеданс оболочки.

Подставим в формулу (5) $w(z) = w_p$ (8) и с учетом (1), (3) определим окончательное выражение вторичного поля p_N (5). Если в формуле (5) принять деформацию равной нулю $w(z) = 0$, то получим формулу для абсолютно твердой оболочки.

Полный расчет деформаций оболочки (7) нужен лишь в том случае, если величина давления излучаемого поля, создаваемого деформацией оболочки, сопоставима или превалируют над давлением, создаваемым отраженным полем. Если составляющая полного давления, обусловленная отраженным полем, существенно превышает давление, определяемое деформаций, то точный расчет деформаций становится излишним. Варианты расчета, по-разному учитывающие деформацию колеблющейся оболочки следующие: **1)** определяется полное решение уравнения колебаний оболочки (7), принимаемое в виде суммы общего решения однородного уравнения с учетом присоединенной жидкости и частного решения. Это низкочастотный диапазон, в котором проявляются первые резонансные формы изгибных колебаний оболочки; **2)** определяется приближенное частичное решение уравнения колебаний оболочки, в котором учитывается только частное решение вынужденных колебаний оболочки $w = w_p$. Это среднечастотный диапазон, в котором колебания на собственных частотах (резонансах) слабо проявляются из-за того, что жидкость, как бы «сглаживает» резонансные пики. В этом диапазоне возможно применение упрощенного метода для приближенного оценочного расчета; **3)** расчет вообще не учитывает деформации оболочки и принимается $w = 0$. В высокочастотном диапазоне вклад отраженного поля существенно превышает вклад от упругих колебаний оболочки (деформаций). Это вариант абсолютного твердого тела. Но поскольку на практике абсолютно твердых тел не бывает, упрощенный метод в высокочастотном диапазоне является практически точным.

На рис. 1—3 показаны результаты расчетов звукового давления вторичного поля в дальней зоне, создаваемого конечной цилиндрической оболочкой в направлении зеркально отраженного поля (в светлой зоне) при угле наклона падающего поля $\psi = 80°$. Параметры оболочки: радиус $a = 4$ м, длина $L = 70$ м, толщина $h = 0.04$ м. Расчеты проведены по точному методу с использованием специально разработанного программного обеспечения на языке Fortran и по упрощенному методу расчета в среде Mathcad. Результаты расчетов для других углов падения и расчетов теневого луча не приведены по причине того, что на справедливость полученных выводов это не влияет.

Целесообразность использования упрощенного метода возникает в тех случаях, когда можно пренебречь виду малости деформациями, определяемыми собственными колебаниями оболочки. Иллюстрацией к сказанному являются результаты расчета, приведенные на рис. 1—3.

На рис. 1 приведены звуковые давления в частотном диапазоне $f = 100–500$ Гц, подсчитанные: *1* — по точному методу, *2* — для твердого цилиндра, *3* — по упрощенному методу. В области низких частот, ниже $f \approx 100$ Гц, при близких значениях амплитуд, составляющих полного давления, большое значение имеют фазовые соотношения суммируемых комплексных величин. В этой зоне требуется повышенная точность вычислений и целесообразно пользоваться точным методом.

Результаты расчетов по точному и упрощенному методам в частотном диапазоне $f \approx 100–500$ Гц можно считать сравнительно близкими. В этом диапазоне для оценочных расчетов можно пользоваться приближенным методом.

Полезность приближенного метода заключается в том, что он позволяет существенно упростить расчеты при приемлемой потере точности, позволяет легко выделить модули составляющих полного поля, а также их действительные и мнимые части.

На рис. 2 приведены результаты расчета по упрощенному методу по сумме первых семи гармоник $n = 0–7$. С выделением составляющей, обусловленной колебаниями оболочки. Обозначено: *1* — давление поля, отраженного абсолютно твердой оболочкой, *2* — давление, обусловленное колебаниями оболочки, *3* — сумма обеих частей. Видно, что давление поля, отраженный от оболочки как твердого тела существенно превышает давление, обусловленное колебаниями оболочки.

Результаты расчетов наглядно показывают, что с увеличением частоты колебаний влияние деформаций оболочки на суммарное давление вторичного поля

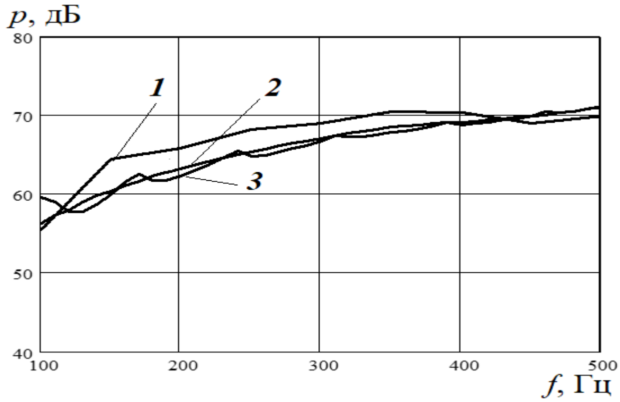

Рис. 1. Звуковое давление: *1* – полный метод; *2* — для твердого цилиндра; *3* — упрощенный метод.

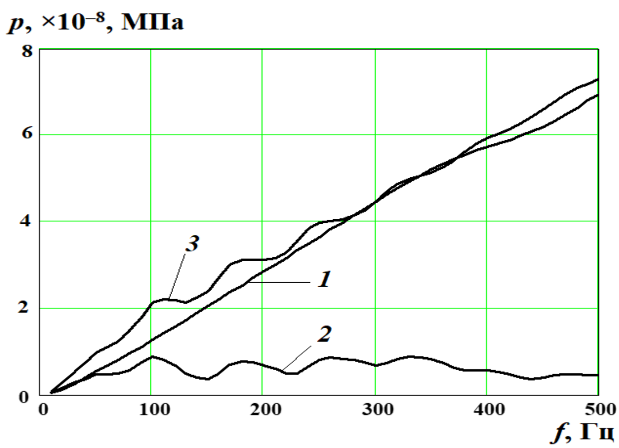

Рис. 2. Звуковое давление: *1* — от твердого цилиндра; *2* — от вибраций; *3* — суммарное.

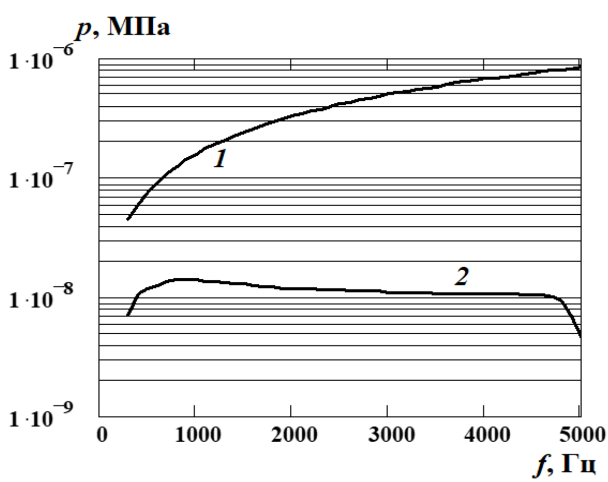

Рис. 3. Звуковое давление вторичного поля: *1* — отраженного от твердой оболочки; *2* — вызванного деформациями оболочки.

существенно уменьшается. В частотном диапазоне $f \approx 100{-}500$ Гц можно использовать упрощенный метод для получения приближенных результатов с достаточной для практики точностью.

Расчеты на более высоких частотах, выше $f = 500$ Гц, показывают, что с ростом частоты колебаний составляющая, связанная с деформациями оболочки падает, а составляющая, связанная с отраженным полем, увеличивается.

Тенденция превышения величины давления отраженного поля над давлением, обусловленным деформациями оболочки, подтверждается расчетами, проведенными в более широком диапазоне частот $f = 300{-}5000$ Гц.

На рис. 3 представлены результаты расчета давления вторичного поля упрощенным методом для двух его составляющих. Верхняя линия *1* — соответствует отражению от абсолютно твердой оболочки, нижняя линия *2* — рассеянию, вызванному колебаниями оболочки. По оси ординат отложены звуковые давления в логарифмическом масштабе. Сравниваемые давления отличаются друг от друга: на частотах $f \approx 500$ Гц примерно в 10 раз, а на частотах $f \approx 5000$ Гц в 100 раз. Отсюда следует важный для практики вывод, что в области высоких частот вкладом, вызванным колебаниями оболочки, можно пренебречь и упрощенный метод расчета звукового давления вторичного поля цилиндрической оболочки можно считать практически точным.

Рекомендации по использованию упрощенного метода следующие. В низкочастотном диапазоне $f \approx 1{-}100$ Гц надо считать точным методом расчета, включающим расчет вынужденных колебаний упругой оболочки, где решения представляются в виде суммы общего и частного решения и необходимо определять корни дисперсионного уравнения.

В среднечастотном диапазоне $f \approx 100{-}500$ Гц можно применять упрощенный метод расчета вынужденных колебаний упругой оболочки.

В высокочастотном диапазоне $f > 500$ Гц использование упрощенного метода наиболее целесообразно.

Естественно, указанные границы частотных диапазонов условные, т.к. получены для принятой расчетной модели оболочки. Фактические границы частотных диапазонов зависят от конструкции и размеров оболочки. Однако тенденция выделения частотных диапазонов сохраняется и может быть полезна в конкретных практических случаях.

Заключение. Специалистам известно, что на высоких частотах оболочку можно считать твердым телом. Однако определение конкретных границ искомых частотных диапазонов с использованием точных методов расчетов усложнено необходимостью решения уравнений вынужденных колебаний оболочки в жидкости. Предложено упрощенное аналитическое решение задачи рассеяния, позволяющее определить полное вторичное дальнее поле конечной цилиндрической оболочки и оценить вклад в него каждой из составляющих, обусловленных свойствами абсолютно твердого и упругого тела. В упрощенном методе не требуется вычислять корни дисперсионного уравнения в жидкости, АЧХ и формы вынужденных колебаний оболочки в жидкости с использованием компьютерных программ. Для выполнения расчетов достаточна математическая система Mathcad.

Применительно к рассмотренной модели оболочки установлено, что при расчете вторичного поля можно выделить три диапазона частот: 1) $f_1 \approx 1{-}100$ Гц, 2) $f_2 \approx 100{-}500$ Гц, 3) $f_3 > 500$ Гц. Указанные конкретные числа справедливы для расчетной модели, принятой в качестве примера. Соответствующие результаты можно легко получить для любой расчетной модели.

Трехдиапазонный вариант возможного применения упрощенного метода расчета, видимо, является справедливым и для других расчетных моделей цилиндрических оболочек.

Новизна предложенного метода в том, что он предложен впервые. Полезность его в том, что для частот колебаний оболочки в области частот выше первых резонансных частот изгибных колебаний оболочки пользоваться точным методом сложно и, кроме того, излишне, т.е. в этом нет необходимости.

Финансирование. Данная работа финансировалась за счет средств бюджета Института машиноведения им. А.А. Благонравова. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шендеров Е.Л.* Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 349 с.
2. *Авербух А.З., Вейцман Р.И., Генкин М.Д.* Колебания элементов конструкций в жидкости. М.: Наука, 1987. 158 с.
3. *Музыченко В.В.* Дифракция звука на упругих оболочках. М.: Наука, 1993. 336 с.
4. *Ильменков С.Л., Клещев А.А., Клименков А.С., Легуша Ф.Ф., Майоров В.С., Чижов В.Ю., Чижов Г.В.* Метод функций Грина в задаче дифракции звука на телах неаналитической формы // XXVII сессия РАО, СПб. 2014. С. 1–8.
5. *Ilmenkov S.L., Kleshchev A.A.* Solution of problem of sound scattering on bodies of non-analitical form with help of green functions // Advances in Signal Processing. 2014. V. 2 (2). P. 50–54.
6. *Williams W.E.* Diffraction by a cylinder of finite length // Math. Proceed. Camb. Phil. Soc. 1956. V. 52. P. 322–335.
7. *Коротин П.И., Салин Б.М., Суворов А.С.* Вопросы численного моделирования рассеяния акустических волн на телах сложной формы с использованием метода конечных элементов // Сб. трудов XX сессии РАО. Т. 1. М.: ГЕОС. 2008. С. 169–172.
8. *Косарев О.И., Пузакина А.К., Нахатакян Д.Ф.* Вынужденные колебания конечной цилиндрической оболочки, погруженной в жидкость // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2020. № 2. С. 16–24.
9. *Косарев О.И.* Вторичное поле конечной упругой цилиндрической оболочки в жидкости в дальней зоне // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2022. № 3. С. 56–62.
10. *Tolokonnikov L.A., Efimov D.Y.* Diffraction of sound waves at an elastic cylinder with an inhomogeneous coating in the vicinity of the boundary of an elastic half-space // Mechanics of solids. 2021. T. 56. № 8. P. 1657–1667.
11. *Skobeltsyn S.A., Tolokonnikov L.A.* Sound diffraction on a sphere with an inhomogeneous coating in a plane wavegide // Mechanics of solids. 2020. T. 55. № 8. P. 1351–1362.
12. *Bunkin A.F., Mikhalovich V.G., Streltsov V.N.* Sound scattering in a nanodispersed medium in the field of a standing electromagnetic wave // Physics of wave phenomena. 2022. T. 30. № 4. P. 256–259.
13. *Bulanov V.A., Bugaeva L.K., Storozhenko A.V.* On sound scattering and acoustic properties of the upper layer of the sea with bubble clouds// J. of Marine Science and Engineering. 2022. T. 10. № 7.
14. *Salin M., Razumov D.* Multi-domain boundary element method for sound scattering on a partly perturbed water surface // J. of Theoretical and Computational Acoustics. 2020. T. 28. № 3. P. 205006.
15. *Gorinin A.G., Gorinin G.L., Golushko S.K.* Vahemathical modeling of three-demansional stress-strain state of homogeneous and composite cylindrical axisymmetric shell // J. of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2024. T. 17. № 1. C. 27–37.