
НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

УДК: 539.372

ИМПУЛЬСНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ПЛАСТИНЫ

© 2025 г. А. М. Попов

Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН, Москва, Россия
e-mail: aproximandra@mail.ru

Поступила в редакцию 10.08.2024 г.

После доработки 10.02.2025 г.

Принята к публикации 20.02.2025 г.

Одной из главных целей при решении задач пластического течения материала конструкции под действием давления является определение остаточных деформаций после снятия нагрузки. Ее решение связано с определенными трудностями, связанными, в основном, с нелинейностью соотношений между деформациями σ и напряжениями ε , возникающими в рассматриваемой конструкции.

Ключевые слова: нагружение, инерционное движение, текучесть материала, комплексная функция, конформные отображения, идеальная несжимаемая жидкость

DOI: 10.31857/S0235711925030052, EDN: GMKYTB

Процесс деформации пластин при относительно малых скоростях ее нагружения сопровождается упругими деформациями, так что проблема количественного описания характеристик процесса и прогноза его последствий сводится к начально-краевой задаче динамической теории упругости [1, 12]. Во многих иных случаях, представляющих научный и прикладной интерес, скорости деформации таковы, что материал пластины испытывает значительные необратимые деформации и разрушается.

В результате задача количественного описания резко усложняется, поскольку, с одной стороны, для ее решения требуются сведения о свойствах материала при неупругом деформировании и разрушении, а с другой — модельные построения для адекватной математической формулировки. Именно по этой причине проблема высокоскоростной деформации тела представляет собой не частный вопрос динамики деформации, а целое научно-техническое направление исследований, интенсивно развивающееся в последнее время [2, 11].

Статья посвящена методике расчета высокоскоростной деформации пластины с помощью теории функций комплексного переменного [3, 10].

Предположим, что в некоторый момент времени на пластину, в общем случае, с малым прогибом h , хордой $2a$, углом полураствора α и радиусом кривизны R , по ее поверхности AB со стороны выпуклости пластины всюду по нормали было приложено одинаковое давление p_0 , значительно превышающее по величине предел текучести материала пластины (рис. 1). Пусть давление нагрузки действовало на пластину кратковременно. Под действием этого давления частицы пластины практически мгновенно приобретают некоторую скорость и в дальнейшем движутся по инерции. За счет инерционного движения частиц обеспечивается выворачивание пластины без разрушения

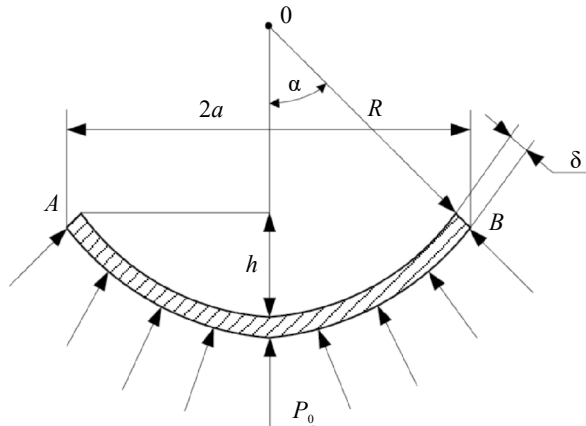


Рис. 1. Схема нагружения тонкой пластины.

в элемент определенной формы, которую необходимо определить. В данной схеме процесс формообразования продолжается до тех пор, пока инерционные силы частиц пластины превосходят прочностные характеристики материала пластины.

В основу метода расчета положим допущение о представлении материала пластины в виде идеальной несжимаемой жидкости, течение которой является баротропным и проходит в отсутствие поля внешних сил.

В этом случае при условии односвязности контура пластины можно показать [4, 7, 9], что движение ее частиц является потенциальным и его можно описать некоторой комплексной функцией $W(x, y)$, состоящей из двух взаимно ортогональных функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$

$$W(x, y) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y). \quad (1)$$

В силу соотношений Даламбера–Эйлера [1–3] зависимость (1) является аналитической.

Рассмотрим схему течения частиц пластины в ограниченной области $DABH$ (рис. 2), такой, что кривая AB совпадает с поверхностью деформируемой пластины, а границы $AD(+\infty)$ и $BH(+\infty)$ параллельны оси Oy , совпадающей с плоскостью симметрии пластины. Для простоты в расчетах давлением среды с внешней стороны реперных границ $AD(+\infty)$ и $BH(+\infty)$ будем пренебрегать.

Таким образом, схему деформации тонкой пластины можно свести к физической картине течения идеальной несжимаемой жидкости, истекающей из конического канала в цилиндрический на плоскости с постоянной скоростью и давлением p_0 на исходном контуре AB .

На рис. 2 текущая поверхность тонкой пластины, описываемая функцией $F(x, y)$, по координатам совпадает с соответствующей изопотенциальной линией $\varphi(x, y) = \text{const}$.

В момент, когда значение $F(x, y)$ будет равно некоторой величине p_c , характеризующей прочностные свойства материала рассматриваемой пластины, считается, что деформация последней прекращается. В данной схеме принимается допущение, что длина исходной дуги AB совпадает с текущей длиной дуги $A'B'$ на соответствующей изопотенциальной линии.

Математическая постановка задачи выглядит следующим образом. Требуется определить комплексный потенциал W в плоскости $z = x + iy$ стационарного течения идеальной несжимаемой жидкости в области ε , ограниченной дугой AB и реперными проницаемыми границами $AD(+\infty)$ и $BH(+\infty)$, при следующих граничных условиях:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \text{на кривой } AB, \\ 0 \text{ на границах } AD (+\infty) \cup BH \cup (+\infty). \end{cases}$$

Заметим, что равенство $\varphi(x, y) = 0$ на реперных границах принято в первом приближении. В общем случае функция $\varphi = \varphi(x, y)$ зависит только от координаты y и не зависит от времени t . При необходимости зависимость $\varphi(y)$ на реперных границах можно подобрать по результатам экспериментальных исследований [5, 8].

Производящий источник жидкости, поступающей в область ε по сужающемуся каналу с жесткими непроницаемыми стенками $D'A$ и $H'B$ в точках пересечения с дугой AB образуют прямые углы (рис. 2).

Кроме того, в задаче требуется также определить неизвестную кривую $F(x, y)$ в области ε .

Задачу решим методом конформных отображений путем преобразования исходной плоскости $z = x + iy$ на расчетную $W = \varphi + i\psi$ с использованием вспомогательных плоскостей $\zeta = \xi + i\eta$ и $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$.

В расчетной плоскости находим решения в виде гармонической функции [1, 4]

$$F(\varphi, \psi) = [p_0 \operatorname{Im} W(\varphi, \psi)]/\pi,$$

и путем обратных преобразований Римана трансформируем их на исходную плоскость так, чтобы полученное решение удовлетворяло граничным условиям, принятым при постановке задачи.

Итак, искомое решение имеет вид аналитической функции

$$F(x, y) = 2p_0 \arctg \left[\cos(\pi\xi/2a\gamma) / \operatorname{sh}(\pi\eta/2a\gamma) \right] / \pi, \quad (2)$$

где $\xi = g\sigma - a\gamma$; $\eta = g\tau$; $\gamma = \pi/(\pi + \alpha)$; $g = 2a\gamma/(\sigma^2 + \tau^2)$;

$$\sigma = 1 - \rho^\gamma \cos \left[\gamma \arctg \left(y / (2r - x - a) \right) \right]; \quad \tau = \rho^\gamma \sin \left[\gamma \arctg \left(y / (2r - x - a) \right) \right];$$

$$\rho = \sqrt{1 - x/r}; \quad r = \left[(x + a)^2 + y^2 \right] / 4a.$$

Формула (2) позволяет рассчитать семейство кривых $F(x, y) = \text{const}$.

В случае более сложного вида поверхности пластины, определяемой кривой AB , задача решается аналогично с использованием дополнительных вспомогательных плоскостей и отображений класса Λ_Π и Λ_Π^{-1} .

Согласно рассмотренной картине (рис. 2) деформация материала пластины будет продолжаться до тех пор, пока значение функции $F(x, y)$ не совпадет с величиной P_c , которая характеризует прочностные свойства материала пластины.

Как свидетельствуют экспериментальные работы [6, 7] по деформации пластин высокоимпульсной кратковременной нагрузкой, значение P_c зависит в основном от динамической прочности σ_d и плотности ρ материала пластины, ее массы m и радиуса кривизны R пластины.

На основе теории размерностей [2, 4, 5] был определен вид функции P_c в форме кубической параболы

$$P_c = \sigma_d \left\{ (A/R) \sqrt[3]{m/p} + (B/R^2) \left(\sqrt[3]{m/p} \right)^2 + Cm / (R^3 \rho) \right\}, \quad (3)$$

где A , B и C — постоянные коэффициенты, определяемые на основе опытных данных.

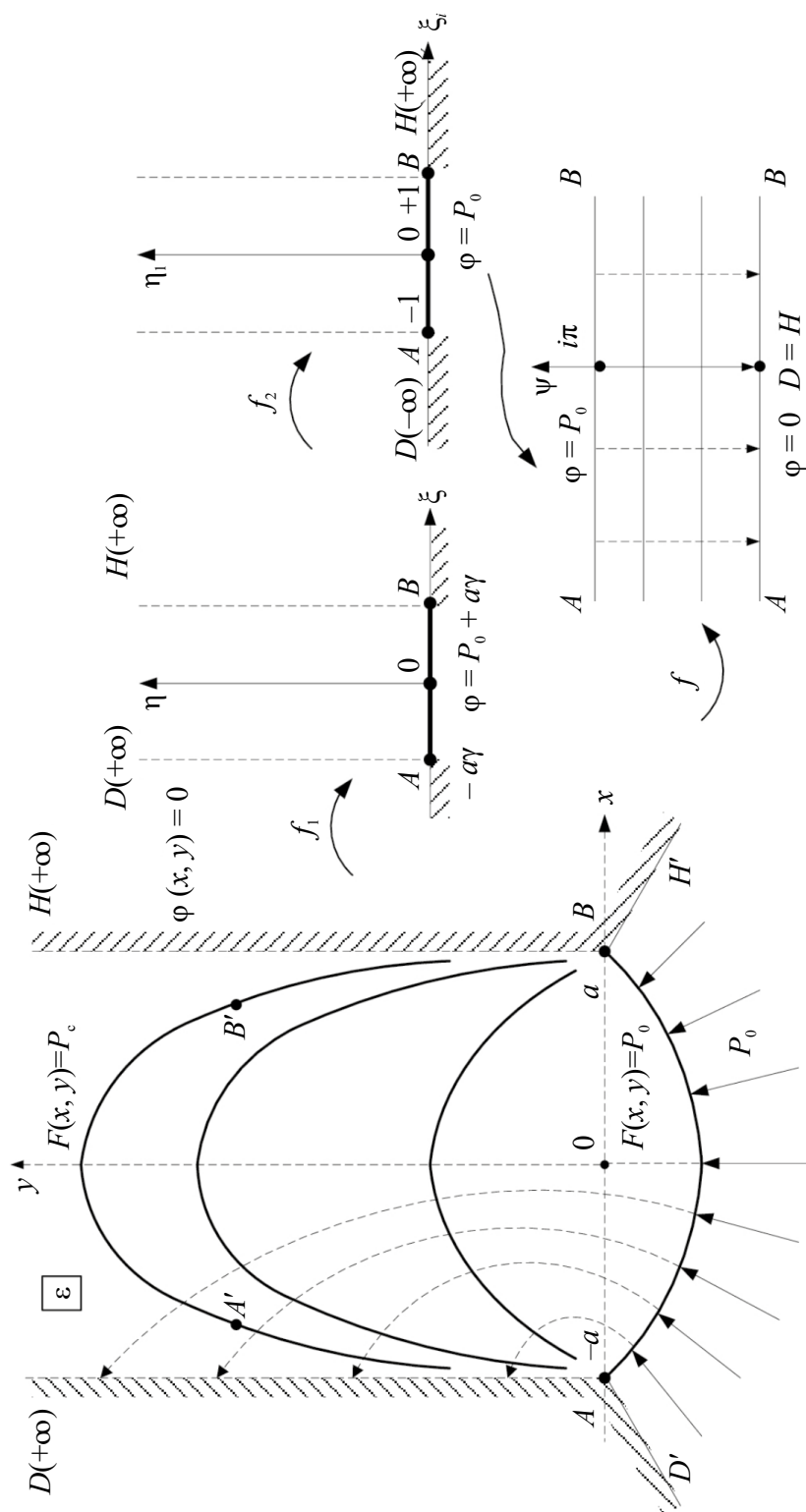


Рис. 2. Схема деформации тонкой пластины.

Таким образом, другим граничным значением функции $F(x, y)$ в формуле (2) является равенство

$$F(x, y) = P_c. \quad (4)$$

При выполнении равенства (4) считается, что деформация рассматриваемой пластины прекращается.

Значения коэффициентов A , B и C в зависимости (3) были получены опытным путем для стальных и медных облицовок и приводятся в табл. 1.

Таблица 1. Значения коэффициентов A , B , C в формуле (3) для пластин

Коэффициент	Материал пластины	
	Сталь	Медь
A	683	884
B	–3741	–5878
C	5116	9065

Эти же исследования позволили определить диапазоны изменения значений относительных геометрических размеров пластины, в которых происходит деформация без ее разрушения. Диапазоны определяются неравенствами

$$\left(\frac{h}{\delta}\right)_1 \leq \frac{h}{\delta} \leq \left(\frac{h}{\delta}\right)_2, \quad \left(\frac{2a}{\delta}\right)_1 \leq \frac{2a}{\delta} \leq \left(\frac{2a}{\delta}\right)_2,$$

где h – прогиб; δ – толщина; a – полухорда пластины.

Предельные значения относительных параметров приведены в табл. 2.

Таблица 2. Предельные значения относительных размеров пластины

Материал пластины							
Сталь				Медь			
$(h/\delta)_1$	$(h/\delta)_2$	$(2a/\delta)_1$	$(2a/\delta)_2$	$(h/\delta)_1$	$(h/\delta)_2$	$(2a/\delta)_1$	$(2a/\delta)_2$
1.3	2.5	2.2	10	1.4	3	2	12

Вывод. Учет пластических деформаций тонкостенных конструкций под действием кратковременной интенсивной нагрузки позволяет вскрыть значительный резерв сопротивляемости конструкции кратковременным динамическим нагрузкам, поскольку большая часть подводимой к конструкции внешней энергии может перейти в работу пластических деформаций прежде, чем конструкция разрушится или получит остаточные деформации [6].

Финансирование. Работа финансировалась за счет средств бюджета Института машиноведения им. А. А. Благоднарова РАН. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зукас Дж.А., Николас Т, Свифт Х. Ф. и др. Динамика удара. Пер. с англ. М.: Мир, 1985. 296 с.
2. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1, 2. М.: Наука, 1995.
3. Баум Ф. А., Орленко Л. П., Станюков К. П., Чельшев В. П., Шехтер Б. И. Физика взрыва. М.: Наука, 1975. 704 с.

4. Миропольский Ф. П., Вишняков О. Л., Попов А. М., Саркисян Р. С. Авиационные боеприпасы и их исследование. М.: ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 1996. 527 с.
5. Селиванов В. В., Соловьев В. С., Сысоев Н. Н. Ударные и детонационные волны. Методы исследования. М.: МГУ, 1990. 206 с.
6. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977.
7. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1977. 416 с.
8. Попов А. М., Валиев Р. М. Система статистических методов обработки экспериментальных данных в машиностроении. Монография. М.: ООО “Технологии стратегического менеджмента”, 2018. 383 с.
9. Long P. Influence of electropulsing treatment on residual stresses and tensile strength of as-quenched medium carbon steel // J. Phys. Conf. Ser. 2019. V. 1187 (3). P. 032054.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1187/3/032054>
10. Conrad H. Electroplasticity in metals and ceramics // Mater. Sci. Eng. A. 2000. V. 287 (2). P. 276–287.
[https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(00\)00786-3](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(00)00786-3)
11. Perkins T. A., Kronenberger T. J., Roth J. T. Metallic forging using electrical flow as an alternative to warm/hot working // J. of Manufact. Sci. Eng. 2007. V. 129 (1). P. 84–94.
<https://doi.org/10.1115/1.2386164>
12. Salandro W. A., Bunget C., Mears L. Energy-based modeling of an electrically-assisted forging process // 38th Annual North American Manufacturing Research Conf., NAMRC38, Kingston, ON, Canada May 25–28, 2010. P. 647.