

УДК 621.01

ИТЕРАЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ О ПОЛОЖЕНИЯХ МЕХАНИЗМОВ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

© 2025 г. С. М. Демидов

Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН, Москва, Россия
e-mail: chipd@rambler.ru

Поступила в редакцию 11.11 2024 г.

После доработки 03.02.2025 г.

Принята к публикации 20.02.2025 г.

В настоящей статье рассмотрены алгоритмы решения прямой и итерационное решение обратной задачи о положениях механизмов параллельной структуры. Рассмотрены достоинства и недостатки разных алгоритмов решения задачи для механизма с шестью степенями свободы.

Ключевые слова: параллельная структура, особые положения, поступательные движения, вращательные движения

DOI: 10.31857/S0235711925030029, EDN: GLXEZQ

К решению задачи о положениях, для механизма с шестью степенями свободы, можно подойти разными путями. Далее будут рассмотрены два основных, это прямое и обратное решение. Использовать будет итерационный алгоритм, он позволит получить максимально улучшенные результаты.

Итерационный алгоритм решения прямой задачи о положения механизмов параллельной структуры. Пусть для механизма с несколькими соединительными кинематическими цепями (рис. 1) нужно решить прямую задачу о положениях. Выбираем некоторое

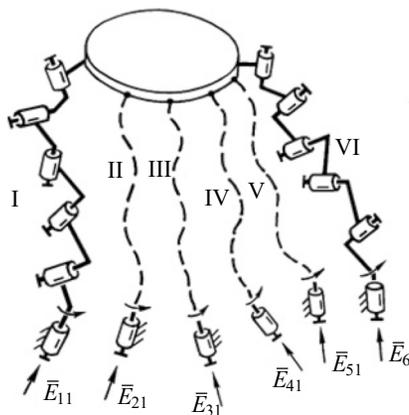


Рис. 1.

начальное положение механизма, при котором известны как абсолютные координаты выходного звена, так и обобщенные координаты. Затем, давая малые конечные приращения обобщенным координатам, используем уравнение “равновесия” скоростей и находим малые конечные перемещения выходного звена. Расчет ведется до тех пор, пока обобщенные координаты не достигнут заданных значений. Данный алгоритм сходится к точному решению, т. к. возникающие в ходе итераций “движения” можно рассматривать как ломаные Эйлера для соответствующих систем дифференциальных уравнений [1].

Для примера обратимся к ℓ -координатным механизмам, имеющим шесть соединительных цепей с одной поступательной приводной парой и двумя сферическими неприводными парами. Рассмотрим два аспекта задачи: 1) нахождение бесконечно малого пространственного перемещения твердого тела (выходного звена) из некоторого начального положения по бесконечно малым приращениям ℓ -координат; 2) построение итерационной процедуры решения.

Считая известным начальное положение тела в некоторой системе координат и значения ℓ -координат, определим кинематический винт $\Phi = \varphi + \chi S$ характеризующий элементарное перемещение тела при заданных элементарных приращениях dl_1, \dots, dl_6 -координат. Здесь φ и S – вектор и момент винта, выражающие поворот и линейное перемещение; χ – множитель Клиффорда [2].

Пусть E_1, \dots, E_6 – единичные орты, направленные по ℓ -координатам, соединяющим точки B_1, \dots, B_6 базы с точками A_1, \dots, A_6 тела (рис. 2). Проекция момента искомого винта Φ , приведенного к точке A_i ($i = 1, \dots, 6$), на орт E_i будет равна относительному моменту Φ и E_i .

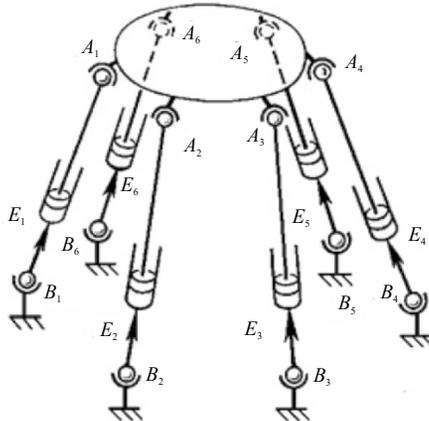


Рис. 2.

Перемещение точки A_i , соответствующее винту Φ , характеризуется моментом винта Φ , приведенным к точке A_i . Следовательно, приращение dl_i равно относительному моменту E_i и Φ , и можно составить систему уравнений, коэффициентами которой являются плюккеры координаты $x_i, y_i, z_i, x_i^0, y_i^0, z_i^0$ ортов E_i ($i = 1, \dots, 6$)

$$x_1^0 x + y_1^0 y + \dots + z_1^0 z = dl_1,$$

...

$$x_6^0 x + y_6^0 y + \dots + z_6^0 z = dl_6,$$

где $x_i, y_i, z_i, x_i^0, y_i^0, z_i^0$ – плюккеры координаты искомого винта Φ .

Из системы получаем решение первой части задачи. Остановимся на второй части задачи. Даны значения ℓ -координат l_i ($i = 1, \dots, 6$). Требуется найти положение тела в пространстве. Для ряда структур эта задача решается аналитически. В общем случае требуется решение нелинейной системы уравнений. Здесь предлагается итерационный способ, требующий на каждом шаге рассмотрения линейной системы.

Зададим некоторое начальное положение тела и определим для него значения ℓ -координат l'_1, \dots, l'_6 . Далее организуем “движение” тела, состоящее из N малых шагов, каждый из которых соответствует малым приращениям ℓ -координат Δl_i ($i = 1, \dots, 6$). На каждом шаге разыскиваем малый конечный кинематический винт $\Delta\Phi$. При этом используем систему уравнений, приведенную выше, заменив в ней правые части на Δl_i ($i = 1, \dots, 6$) [3].

Зная $\Delta\Phi$, можно найти приращения декартовых координат точек A_1, \dots, A_6 . Указанные приращения равны моментам винта относительно этих точек. Таким образом, в конце каждого шага становится известным новое положение тела. Проведя рассмотренную процедуру N раз, можно утверждать, что с некоторой ошибкой решена вторая часть поставленной задачи, причем для уменьшения ошибки требуется увеличение N .

Отметим, что можно выбрать любую траекторию “движения” тела из их бесконечного множества, соответствующего различным законам изменения ℓ -координат. На любом шаге может встретиться особое положение, при котором главный определитель системы уравнений равен нулю. В качестве простейшего способа решения задачи в этом случае предлагается использовать алгоритм “движения по инерции”, заключающийся в следующем.

При подходе к особому положению, когда определитель системы уравнений становится меньше наперед заданного числа ε , даем телу “перемещение” по винту, соответствующему последней выполненной процедуре. Определяя новое положение тела, находим определитель, составленный из плюккеровых координат ортов, и делаем это до тех пор, пока он не станет больше ε . Тело “пришло” в новое положение и уже из него, задавая соответствующие приращения ℓ -координат, следует искать требуемое решение [4].

Рассмотрим пример – решение прямой задачи для тела-сферы радиусом 1 м, положение в пространстве, для которого определяется шестью расстояниями между точками A_1, \dots, A_6 и B_1, \dots, B_6 (рис. 3). На рисунке не показаны орты E_1 и E_2 , а также точки A_4, A_5, A_6 .

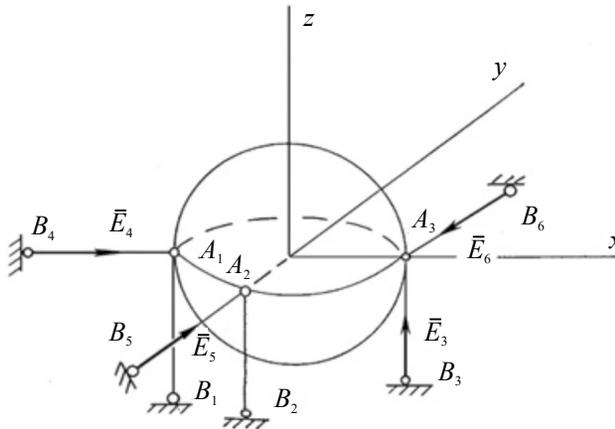


Рис. 3.

Начальным считаем положение, изображенное на рис. 3, при котором $\ell = 1$ м ($i = 1, \dots, 6$) а плюккерovy координаты ортов E_1, \dots, E_6 образуют матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пусть требуется найти положение тела при приращении l_1 и l_4 на 0.1 м. Используем лишь одну итерацию. Из системы уравнений, полагая $\Delta l_1 = \Delta l_4 = 0.1$ м, $\Delta l_2 = \Delta l_3 = \Delta l_4 = \Delta l_5 = \Delta l_6 = 0$, находим плюккерovy координаты

$$\Delta\Phi: x = 0.05 \text{ рад}, y = 0.05 \text{ рад}, z = 0, x^0 = 0.1 \text{ м}, y^0 = 0.1 \text{ м}, z^0 = 0.05 \text{ м}.$$

Точка O переместится на 0.1 м по оси x и на 0.05 м по оси z , а тело повернется вокруг оси с направляющим вектором $(0.707, 0.707, 0)$ на угол 0.0707 рад.

Приводя найденный винт $\Delta\Phi$ к точкам A_1, \dots, A_6 , находим их перемещения: точки A_1 и A_4 переместятся по осям x и z на 0.1 м, а точки A_2, A_3, A_5, A_6 — по оси x на 0.1 м.

Вследствие того, что шаг малый, но не бесконечно малый, имеет место невязка; по выполнению процедуры значения l -координат будут отличаться от заданных. Невязки l_1 и l_4 равны 0.0045 м, а для l_2, l_3, l_5, l_6 они составляют 0.005 м. Итак, невязка примерно равна 5% от величины шага.

Для механизмов с параллельной структурой, отличной от l -координатной, приведенный алгоритм работоспособен, но должен быть дополнен определением силовых взаимных винтов вместо E_1, \dots, E_6 .

Итерационное решение обратной задачи о положениях механизмов параллельной структуры. Обратная задача о положениях механизмов параллельной структуры заключается в определении обобщенных координат по заданному положению выходного звена, выраженному в абсолютных координатах.

Поскольку механизм параллельной структуры содержит несколько кинематических цепей, то при решении обратной задачи целесообразно рассмотреть каждую цепь, определяя по абсолютным координатам выходного звена угловые координаты звеньев.

Рассмотрим задачу на примере одной кинематической цепи (рис. 4) механизма параллельной структуры с шестью степенями свободы. Если механизм имеет менее шести степеней свободы, то следует применять алгоритм, предусматривающий определение кинематического винта, наиболее близкого к требуемому.

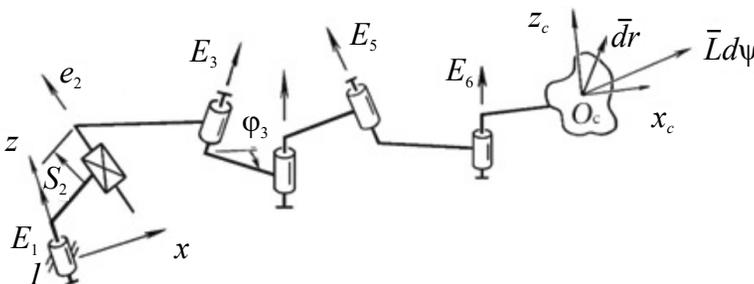


Рис. 4. Кинематическая цепь с поступательной парой.

Для механизма с шестью степенями свободы предлагаемый алгоритм состоит из двух этапов. На первом из них подлежит определению вектор перемещения некоторой точки выходного звена, а также ось и угол поворота этого звена, необходимые для его перевода из какого-либо начального положения в требуемое положение. На втором этапе найденное перемещение выходного звена делится на некоторое количество шагов, и на каждом шаге определяются приращения обобщенных координат по алгоритму управления манипулятором по вектору скорости, т. е. по решению обратной задачи о скоростях.

На рис. 5 изображена кинематическая цепь с шестью степенями свободы, у которой все пары вращательные, кроме поступательной пары 2; $O_c x y z$ и $O_c x_c y_c z_c$ – системы координат, связанные соответственно с основанием и с выходным звеном (оси Y и Y_c не показаны); $\varphi_1, S_2, \dots, \varphi_6$ – относительные координаты (показаны только S_2 и φ_3 [5].

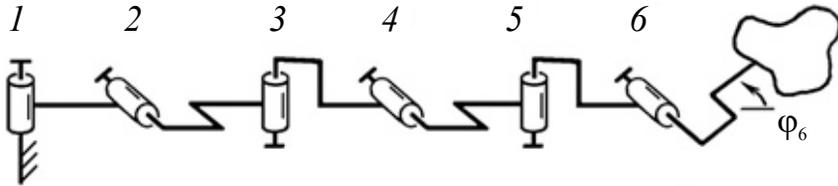


Рис. 5. Кинематическая цепь с вращательными парами.

Будем считать, что положение выходного звена, которое оно должно занять, задано матрицей положения, описывающей изменение координат точки при переходе от системы $O_c x_c y_c z_c$ к системе $O_c x y z$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \xi \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \eta \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где a_{ij} – направляющие косинусы ортов осей $X_c Y_c Z_c$ в системе $O_c x y z$, например $a_{12} = \cos(x, y_c)$; ξ, η, ζ – координаты точки O_c в системе $O_c x y z$.

Полагаем, что задано некоторое начальное положение кинематической цепи, для которого известна матрица положения тела, а также значения обобщенных координат. Выходное звено можно перевести из начального положения в требуемое перемещением точки O_c по определенному вектору r и вращением вокруг оси с ортом L , проходящей через точку O_c , на угол Ψ . Векторы r, L , угол Ψ подлежат определению на первом этапе. Для проекций вектора r имеем $r_x = \xi - \xi', r_y = \eta - \eta', r_z = \zeta - \zeta'$, где ξ', η', ζ' – координаты точки O_c в системе $O_c x y z$ в начальном положении [6, 7].

Для определения L и Ψ применим аппарат кватернионов. Как известно, матрица размера 3×3 , составленная из первых трех строк и столбцов матрицы положения, описывает поворот ортов осей x_c, y_c, z_c относительно осей x, y, z вокруг некоторой оси с ортом M на угол δ . Этот поворот можно представить кватернионом

$$\Delta = \delta_0 + i\delta_1 + j\delta_2 + k\delta_3 = \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) + M \sin\left(\frac{\delta}{2}\right),$$

где $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ – параметры кватерниона; i, j, k – орты осей x, y, z ;

$$\delta_0 = \pm \frac{\sqrt{a_{11} + a_{22} + a_{33}}}{2}; \delta_1 = \frac{(a_{32} - a_{33})}{4\delta_0};$$

$$\delta_2 = \frac{(a_{13} - a_{31})}{4\delta_0}; \delta_3 = \frac{(a_{21} - a_{12})}{4\delta_0}.$$

Аналогично можно определить параметры кватерниона Γ , соответствующего матрице направляющих косинусов, взятых из матрицы положения.

Кватернион Δ равен кватернионому произведению $\Delta = \Theta\Gamma$, где кватернион $\Theta = \theta_0 = i\theta_1 + j\theta_2 + k\theta_3 = \cos(\Phi/2) + L\sin(\Phi/2)$ и соответствует искомому повороту выходного звена из начального положения в требуемое.

Запишем систему уравнений относительно параметров кватерниона Θ

$$\begin{cases} \theta_0\gamma_0 - \theta_1\gamma_1 - \theta_2\gamma_2 - \theta_3\gamma_3 = \delta_0, \\ \theta_0\gamma_1 + \theta_1\gamma_0 + \theta_2\gamma_3 - \theta_3\gamma_2 = \delta_1, \\ \theta_0\gamma_2 - \theta_1\gamma_3 + \theta_2\gamma_0 + \theta_3\gamma_1 = \delta_2, \\ \theta_0\gamma_3 + \theta_1\gamma_2 - \theta_2\gamma_1 + \theta_3\gamma_0 = \delta_3, \end{cases}$$

где $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – параметры кватерниона Γ .

После решения этой системы становятся определенными L и Ψ .

На втором этапе решения задается целое число N и определяются $qr = r/N$, $q\Psi = \Psi/N$. Число N должно быть достаточно велико. Считаем, что на каждом шаге решения точка O_c “перемещается” на qr и выходное звено “вращается” вокруг оси с ортом L на угол $q\Psi$.

Для бесконечно малых dr и $d\Psi$ запишем

$$E_1 d\phi_1 + e_2 dS_2 + \dots + E_6 d\phi = Ld\Psi + xdr,$$

где E_1, e_1, \dots, E_6 – орты осей пар; $d\phi_1, dS_2, \dots, d\phi_6$ – приращения обобщенных координат.

Данное винтовое уравнение разлагаем по плюккерovým координатам и получаем систему

$$\begin{cases} x_1 d\Phi_1 + 0 \dots + x_6 d\Phi_6 = d\Psi \cdot L_x, \\ y_1 d\Phi_1 + 0 \dots + y_6 d\Phi_6 = d\Psi \cdot L_y, \\ z_1 d\Phi_1 + 0 \dots + z_6 d\Phi_6 = d\Psi \cdot L_z, \\ x_1^0 d\Phi_1 + x_2^0 dS_2 + \dots + x_6^0 d\Phi_6 = d\Psi \cdot (\eta L_z - \zeta L_y) + dr_x, \\ y_1^0 d\Phi_1 + y_2^0 dS_2 + \dots + y_6^0 d\Phi_6 = d\Psi \cdot (\xi L_x - \xi L_z) + dr_y, \\ z_1^0 d\Phi_1 + z_2^0 dS_2 + \dots + L_i d\Phi_6 = d\Psi \cdot (\zeta L_y - \eta L_x) + dr_z, \end{cases}$$

где $x_i, y_i, z_i, x_i^0, y_i^0, z_i^0$ – плюккерovy координаты ортов осей пар ($i = 1, \dots, 6$).

L_x, L_y, L_z – проекции орта L ; ξ, ζ, η – координаты точки O_c .

Для нахождения плюккерových координат, входящих в эти уравнения, целесообразно воспользоваться дуальной формулой Родрига. Сначала все звенья “вытягиваем” по одной линии, например по оси x . Это возможно при соответствующем выборе этой оси.

Тогда, обозначая E'_j начальное положение орта E_j , оси пары j , будем иметь

$$E'_j = j \cos A_j + k \sin A_j,$$

где $A_j = \alpha + \alpha a_j$ – дуальный угол между ортом E'_j и ортом j оси Y ; a_j – обычный угол; A_j – расстояние между соответствующими осями.

После поворота вокруг оси кинематической пары, орт которой E_k , $k = 1, \dots, (j - 1)$, на угол Ψ_k положение орта E_j будет

$$E_j'' = E_j' \cos \Psi_k + E_k (E_j' E_k) (1 - \cos \Psi_k) + E_k E_j' \sin \Psi_k.$$

Если пара k поступательная, то $E_j'' = E_j' + \kappa E_k E_{kj}$.

Чтобы получить положение орта E_j нужно указанную операцию проделать $(j - 1)$ раз. После этого получим $E_j = iE_{jx} + jE_{jy} + kE_{jz}$, где E_{jx} , E_{jy} , E_{jz} дуальные координаты орта E_j . Далее нужно разделить главную и моментную части этих координат и получить искомые плюккеровы координаты. Полученные из указанной системы уравнений значения приращений обобщенных координат прибавляются к текущим значениям, и процедура повторяется. Поскольку в правую часть подставляются конечные значения qr и $q\Psi$, то имеет место ошибка, уменьшающаяся с ростом числа N [8, 9].

На любом шаге решения может встретиться особое положение, когда матрица коэффициентов указанной системы близка к вырождению. В этих положениях кинематический винт должен входить в пятичленную группу, определяемую пятью независимыми ортами осей кинематических пар, и взаимен с некоторым единственным винтом [10].

Для особых положений в алгоритме предлагается предусмотреть определение векторов qr' и $q\Psi L'$, имеющих неотрицательные проекции на qr и L . Затем нужно вновь определить Γ , L , Ψ , которые необходимы для перевода звена из “достигнутого” положения в требуемое. Определение указанных параметров можно проводить и на любом другом шаге для устранения накапливающейся ошибки [11, 12].

Отметим, что в особом положении при неподвижном выходном звене, кинематическая цепь имеет мгновенную подвижность, т. е. может быть “деформирована” в двух направлениях. Учитывая оба направления, можно получить два положения цепи, соответствующие требуемому положению выходного звена.

Алгоритм дает одно решение, и для устранения такого недостатка предлагается рассматривать несколько начальных положений. Из получаемых нескольких решений можно выбрать то, которое наилучшим образом отвечает каким-либо дополнительным условиям, в частности ограничением перемещений в парах.

При применении изложенного алгоритма для некоторых кинематических цепей может быть целесообразным разбиение “движения” на несколько этапов. В частности, для схемы (рис. 4) это следующие этапы: вращение кинематической цепи вокруг оси пары I до попадания точки O_c в плоскость, проходящую через ось I , в которой точка O_c должна находиться в требуемом положении выходного звена; линейное перемещение выходного звена до совмещения точки O_c со своим требуемым положением; поворот выходного звена вокруг оси, проходящей через точку O_c до требуемого положения [13].

Достоинством рассмотренного алгоритма является его универсальность, его можно применить для любого механизма с шестью степенями свободы. В качестве примера рассмотрим кинематическую цепь (рис. 5), имеющую шесть вращательных пар, скрещивающихся под прямыми углами. Длина всех звеньев 0.2 м. Требуемое положение выходного звена задано матрицей размера 4×4 и соответствует значениям углов $\varphi_1 = \varphi_5 = \varphi_6 = 10^\circ$, $\varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 40^\circ$ (углы отсчитываются от продолжений соответствующих осей звеньев, для примера изображен угол φ_6). В качестве начального было взято положение $\varphi_1 = \varphi_5 = \varphi_6 = 0^\circ$, $\varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 30^\circ$.

Как показали расчеты, при “перемещении” выходного звена из начального положения в конечное он должен быть повернут на угол $\Psi = 18.5^\circ$ вокруг оси L с координатами 0.37–0.711, 0.6 м. Вектор линейного перемещения имеет координаты – 0.00178, 0.160, 0.067 м.

“Перемещение” выходного звена было организовано таким образом, чтобы на каждом шаге угол поворота и линейное перемещение не превышали соответственно 2° и 0.02 м. При этом имели место девять шагов и были получены следующие значения углов: $\varphi_1 = 9.64^\circ$; $\varphi_2 = 40.7^\circ$; $\varphi_3 = 39.6^\circ$; $\varphi_4 = 41.4^\circ$; $\varphi_6 = 10.6^\circ$. Ошибка составила по положению: $r_x = 2.12^\circ \cdot 10^{-2}$ м, $\Delta r_y = -7.46^\circ \cdot 10^{-4}$ м, $\Delta r_z = 1.69^\circ \cdot 10^{-4}$ м, по углу $\Delta \Psi = 0.31^\circ$.

В связи с тем, что шаг достаточно груб, точность решения не столь высока, однако ее можно повысить, введя еще одну итерацию. Следует отметить, что альтернативным является способ решения с использованием шести уравнений, полученных перемножением матриц и имеющих такой вид:

$$\begin{aligned} & (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_3)(\cos \varphi_4 \cos \varphi_5 \cos \varphi_6 + \sin \varphi_4 \sin \varphi_6) + \\ & + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 (\sin \varphi_4 \cos \varphi_5 \cos \varphi_6 - \cos \varphi_4 \sin \varphi_6) + \\ & + (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_3) \sin \varphi_5 \cos \varphi_6 = a_{11} = 0.96. \end{aligned}$$

Решение системы таких уравнений было бы связано с большими вычислительными трудностями и могло бы вообще не дать результата при неудачном выборе начальных значений.

Вывод. Таким образом, в статье были рассмотрены разные алгоритмы решения прямой и итерационное решение обратной задачи о положениях механизмов параллельной структуры. Данные подходы к решению имеют разную точность в получении результатов в зависимости от конфигурации механизма.

Финансирование. Работа финансировалась за счет средств бюджета Института машиноведения им. А. А. Благонравова. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stewart D.* A platform with six degrees of freedom // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. 1965. V. 180. Part 1. № 15. P. 371–386.
2. *Merlet J.-P.* Singular configurations of parallel manipulators and Grassman geometry // Intern. J. RoboticRes. 1989. V. 8 (5). P. 45–56.
3. *Hunt K.* Structural kinematics of in-parallel-actuated robot arms // ASME. J. of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design. 1983. V. 105. P. 705–712.
4. *Корендяев А. И., Саламандра Б. Л., Тывес Л. И. и др.* Манипуляционные системы роботов. М.: Машиностроение, 1989. 472 с.
5. *Глазунов В. А., Колискор А. Ш., Крайнев А. Ф., Модель Б. И.* Принципы классификации и методы анализа пространственных механизмов с параллельной структурой // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1990. № 1. С. 41–49.
6. *Диденко Е. В., Певнев В. Г., Демидов С. М.* Структурный синтез механизмов параллельной структуры, содержащих кинематические цепи, налагающие связи на движение выходного звена // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2024. № 8 (773). С. 24–30.
7. *Алешин А. К., Бузурина Д. С., Гаврюшин С. С. и др.* Новые механизмы робототехнических и измерительных систем. Сер. Мир робототехники и мехатроники. Глава 3. Разработка методологии применения плюккерových координат для анализа особых положений механизмов параллельной структуры / Под ред. В. А. Глазунова, С. В. Хейло. М.: ТЕХНОСФЕРА, 2022. С. 82.
8. *Глазунов В. А., Крайнев А. Ф., Рахоян Г. В., Быков Р. Э., Цыбин А. В.* К задаче о выводе из особых положений механизмов параллельной структуры // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2001. № 6. С. 70–75.

9. *Glazunov V.* Twists of Movements of Parallel Mechanisms Inside Their Singularities // Mechanism and Machine Theory. 2006. V. 41. P. 1185–1195.
10. *Гебель Е. С., Гаврилина Л. В., Глазунов В. А., Демидов С. М., Швец П. А.* Построение зоны сингулярности для одного вида механизмов параллельной структуры // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2020. № 3. С. 4–10.
11. *Лунев В. В., Мисюрин С. Ю.* Особые многообразия плоских и пространственных механизмов с несколькими степенями свободы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1993. № 1. С. 102–109.
12. *Глазунов В. А., Диментберг Ф. М.* Об особом положении пространственного пятизвенника, образованного из двух механизмов Беннета // Машиноведение. 1984. № 5. С. 50–54.
13. *Алешин А. К., Бузорина Д. С., Гаврюшин С. С. и др.* Новые механизмы робототехнических и измерительных систем. Сер. Мир робототехники и мехатроники. Глава 3. Разработка методологии применения плюккерových координат для анализа особых положений механизмов параллельной структуры / Под ред. В. А. Глазунова, С. В. Хейло. М.: ТЕХНОСФЕРА, 2022. С. 82.