
НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

УДК 539.3

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ ПЛАСТИЧЕСКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА С РЕАЛИЗАЦИЕЙ НА ОСНОВЕ МКЭ В РАСЧЕТЕ ОБОЛОЧКИ ПРИ УЧЕТЕ ДЕФОРМАЦИИ СДВИГА

© 2025 г. М. Ю. Клочков¹, В. А. Пшеничкина¹, А. П. Николаев²,
Ю. В. Клочков^{2,*}, О. В. Вахнина², Т. А. Соболевская²

¹Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия

²Волгоградский государственный аграрный университет, Волгоград, Россия

*e-mail: klotchkov@bk.ru

Поступила в редакцию 21.03.2024 г.

После доработки 10.12.2024 г.

Принята к публикации 20.12.2024 г.

В расчете тонкой оболочки при учете деформации поперечного сдвига на основе гипотезы Тимошенко сравниваются результаты упругопластического напряженного состояния при использовании определяющих соотношений в двух вариантах с реализацией шагового метода нагружения. В первом варианте определяющие уравнения получены дифференцированием соотношений деформационной теории пластичности при неизменной метрике процесса деформирования. Подчеркнута громоздкость выражений даже при неизменной метрике процесса деформирования. Во втором варианте определяющие уравнения на шаге нагружения получены при использовании гипотезы о пропорциональной зависимости между компонентами девиаторов приращений напряжений и деформаций без разделения приращений деформаций на упругую и пластическую части. В качестве конечного элемента принят четырехугольный фрагмент срединной поверхности оболочки с кинематическими узловыми неизвестными в виде перемещений и их первых производных. На примере расчета оболочки показана эффективность разработанных определяющих уравнений для учета физической нелинейности.

Ключевые слова: тонкостенный объект техносферы, гипотеза Тимошенко, эллиптический цилиндр, четырехузловой элемент дискретизации, матрица пластичности, шаговая процедура нагружения

DOI: 10.31857/S0235711925020022, EDN: DHSXQS

На современном этапе развития городских и промышленных конгломераций широкое распространение получают конструкции из тонких оболочек в виде различных объектов техносферы (покрытия, перекрытия, купола, трубопроводы, резервуары, емкости и т.п.). Для снижения материалоемкости этих сооружений служит учет в разумных пределах пластической стадии работы конструкционных материалов, из которых изготавливаются те или иные тонкостенные объекты техносферы. Проектировщик должен располагать современным, корректным с теоретической точки зрения вычислительным инструментом, с помощью которого становится возможным выполнение детального анализа напряженно-деформированного состояния

(НДС) такого рода объектов за пределом упругости. В качестве таких инструментов в настоящее время выступают различные вычислительные комплексы, основывающиеся, как правило, на конечно-элементном анализе НДС проектируемых тонкостенных объектов техносферы. Однако корректность и прозрачность этих вычислительных комплексов по-прежнему вызывают много вопросов. Поэтому весьма актуальной остается задача создания корректных с точки зрения теории и приемлемых по уровню точности вычислительных алгоритмов для определения прочностных параметров тонкостенных объектов техносферы с учетом пластической стадии работы применяемого конструкционного материала на основе современных численных методов анализа НДС оболочечных конструкций.

Теория упругого и упругопластического деформирования твердых тел в настоящее время достаточно развита [1, 2] и широко используется в разрабатываемых численных методах определения напряженно-деформированного состояния (НДС) твердых тел.

Среди численных методов исследования конструктивных элементов инженерных сооружений получил широкое использование метод конечных элементов (МКЭ).

Наиболее широко МКЭ используется в формулировке метода перемещений как в случаях малых деформаций [3–5], так и при конечных деформациях [6–8].

В последние годы метод конечных элементов применяется в смешанной формулировке с кинематическими и силовыми узловыми неизвестными [9].

В настоящем исследовании получен на шаге нагружения новый вариант определяющих уравнений на основе предположения о пропорциональности составляющих девиаторов приращений напряжений и приращений деформаций. Представленные определяющие соотношения реализованы в алгоритме составления матрицы жесткости четырехузлового элемента дискретизации, являющегося фрагментом срединной поверхности тонкостенной оболочечной конструкции. На примерах определения прочностных параметров упругопластического деформирования кругового и эллиптического цилиндров выполнена верификация разработанного алгоритма и показан высокий уровень точности вычисления напряжений исследуемых тонкостенных объектов при учете деформаций поперечного сдвига.

Геометрические соотношения. В качестве тонкостенного объекта техносферы рассматривается эллиптический цилиндр с длинами полуосей эллипса a и b , радиус-вектор точки срединной поверхности M^0 которого запишется выражением

$$\mathbf{R}^0 = x\mathbf{i} + a\cos t\mathbf{j} + b\sin t\mathbf{k}, \quad (1)$$

где t — угловой параметр эллипса, отсчитываемый от оси OZ против хода часовой стрелки.

При использовании в качестве координатных линий оси x и дуги S эллипса поперечного сечения цилиндра базисные векторы точки M^0 определяются дифференцированием (1)

$$\mathbf{e}_1^0 = \mathbf{R}_{,x}^0 = \mathbf{i}; \quad \mathbf{e}_2^0 = \mathbf{R}_{,t}^0 \cdot (dt/dS); \quad \mathbf{e}_n^0 = \mathbf{e}_1^0 \times \mathbf{e}_2^0,$$

где $dt/dS = 1/\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$.

Положение точки $M^{0\xi}$, находящейся на расстоянии ξ от точки M^0 , может быть задано радиус-вектором

$$\mathbf{R}^{0\xi} = \mathbf{R}^0 + \xi\mathbf{e}_n^0.$$

После n этапов нагружения точки M^0 и $M^{0\xi}$ переместятся в положения M и M^ξ , а по завершению $(n + 1)$ -го этапа нагружения — в положения M^* и $M^{*\xi}$. Радиусы-векторы, определяющие положения вышеупомянутых точек, можно представить соответствующими выражениями:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^0 + \mathbf{v}; \quad \mathbf{R}^\xi = \mathbf{R}^{0\xi} + \mathbf{V}; \quad \mathbf{R}^* = \mathbf{R} + \mathbf{w}; \quad \mathbf{R}^{*\xi} = \mathbf{R}^\xi + \mathbf{W}, \quad (2)$$

где $\mathbf{v} = v^p \mathbf{e}_p^0 + v^n \mathbf{e}_n^0$; $\mathbf{w} = w^p \mathbf{e}_p^0 + w^n \mathbf{e}_n^0$ — векторы перемещения точки M^0 после серии из n этапов нагружений и после $(n+1)$ -го этапа нагружения ($p = 1, 2$); $\mathbf{V} = \mathbf{v} + \xi(\mathbf{G} \times \mathbf{e}_n^0)$; $\mathbf{W} = \mathbf{w} + \xi(\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{e}_n^0)$ — векторы перемещения точки $M^{0\xi}$ после серии из n этапов нагружения и после $(n+1)$ -го этапа нагружения.

Входящие в \mathbf{V} и \mathbf{W} суммарный и шаговый векторы углов поворота окрестностей \mathbf{G} и $\boldsymbol{\gamma}$ определяются выражениями [1]

$$\mathbf{G} = -G^2 \mathbf{e}_1^0 + G^1 \mathbf{e}_2^0 + G^n \mathbf{e}_n^0; \quad \boldsymbol{\gamma} = -\gamma^2 \mathbf{e}_1^0 + \gamma^1 \mathbf{e}_2^0 + \gamma^n \mathbf{e}_n^0.$$

Дифференцированием радиус-векторов (2) по координатам x , S и ξ определяются базисные векторы точек $M^{0\xi}$, M^ξ и $M^{*\xi}$ соответственно

$$\mathbf{g}_\alpha^0 = \mathbf{R}_{,\alpha}^{0\xi}; \quad \mathbf{g}_\alpha^* = \mathbf{R}_{,\alpha}^\xi; \quad \mathbf{g}_{,\alpha}^* = \mathbf{R}_{,\alpha}^{*\xi};$$

$$(\alpha = x, S); \quad \mathbf{g}_3^0 = \mathbf{R}_{,\xi}^{0\xi}; \quad \mathbf{g}_3 = \mathbf{R}_{,\xi}^\xi; \quad \mathbf{g}_3^* = \mathbf{R}_{,\xi}^{*\xi}.$$

Деформации, накопленные за n шагов нагружения, и их приращения на $(n+1)$ -м этапе нагружения определяются соотношениями [1]

$$\varepsilon_{mn}^\xi = (\mathbf{g}_m^0 \mathbf{V}_{,n} + \mathbf{g}_n^0 \mathbf{V}_{,m})/2; \quad \Delta \varepsilon_{mn}^\xi = (\mathbf{g}_m^0 \mathbf{W}_{,n} + \mathbf{g}_n^0 \mathbf{W}_{,m})/2,$$

где $m, n = 1, 2, 3$.

Вывод матрицы пластичности на $(n+1)$ -м этапе нагружения. Выражения для контравариантных компонент тензора напряжений за пределом упругости можно получить на основе соотношений деформационной теории пластичности [2] в следующем виде:

$$\sigma^{mn} = \frac{2}{3} E_{cd} g^{mk} g^{nl} \varepsilon_{kl}^\xi - \frac{1}{3} g^{mn} P_\varepsilon \left(\frac{2}{3} E_{cd} - K \right), \quad (3)$$

где $E_{cd} = \sigma_i/\varepsilon_i$ — секущий модуль диаграммы деформирования; $K = E/(1-2\nu)$; $P_\varepsilon = g^{kl} \varepsilon_{kl}^\xi$ — первый инвариант тензора деформаций ($k, l = 1, 2, 3$). Для получения определяющих уравнений на $(n+1)$ -м этапе нагружения, как правило, применяется формула полного дифференциала

$$\Delta \sigma^{mn} = \frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial \varepsilon_{kl}} \Delta \varepsilon_{kl}, \quad (4)$$

Получение величин $\Delta \sigma^{mn}$ (4), представляет собой громоздкую процедуру последовательного дифференцирования.

При учете $\Delta \sigma^{33} = 0$ соотношения (4) можно представить в матричном виде

$$\left\{ \Delta \sigma^{mn} \right\}_{5 \times 1} = [C_I]_{5 \times 5} \left\{ \Delta \varepsilon_{mn}^\xi \right\}_{5 \times 1}, \quad (5)$$

где $\left\{ \Delta \sigma^{mn} \right\}_{1 \times 5}^T = \left\{ \Delta \sigma^{11} \Delta \sigma^{12} \Delta \sigma^{13} \Delta \sigma^{22} \Delta \sigma^{23} \right\}$; $\left\{ \Delta \varepsilon_{mn}^\xi \right\}_{1 \times 5}^T = \left\{ \Delta \varepsilon_{11}^\xi 2\Delta \varepsilon_{12}^\xi 2\Delta \varepsilon_{13}^\xi \Delta \varepsilon_{22}^\xi 2\Delta \varepsilon_{23}^\xi \right\}$;

$[C_I]$ — матрица пластичности на $(n+1)$ -м этапе нагружения.

Реализация приведенного выше алгоритма получения матрицы пластичности $[C_I]_{5 \times 5}$ на $(n+1)$ -м этапе нагружения в полном объеме представляет собой достаточно трудоемкий процесс. Поэтому для получения матрицы пластичности на $(n+1)$ -м этапе нагружения предлагается альтернативный подход, в котором используется предположение о пропорциональности компонент девиаторов приращений напряжений и деформаций, приводящее к соотношениям

$$\Delta\sigma^{mn} = \frac{2}{3} E_K g^{mk} g^{nl} \Delta\varepsilon_{kl}^{\xi} - \frac{1}{3} g^{mn} P_{\Delta\varepsilon} \left(\frac{2}{3} E_K - K \right), \quad (6)$$

где E_K — касательный модуль диаграммы деформирования; $P_{\Delta\varepsilon} = g^{kl} \Delta\varepsilon_{kl}^{\xi}$.
Соотношения (6) в матричной форме запишутся в следующем виде:

$$\left\{ \Delta\sigma^{mn} \right\}_{6 \times 1} = [C_{II}]_{6 \times 6} \left\{ \Delta\varepsilon_{mn}^{\xi} \right\}_{6 \times 1}. \quad (7)$$

Для пятимодальной теории оболочек в (6) принимается $\Delta\sigma^{33} = 0$ и уравнения представляются в матричном виде:

$$\left\{ \Delta\sigma^{mn} \right\}_{1 \times 5}^T = [C]^T_{5 \times 5} \left\{ \Delta\varepsilon_{mn}^{\xi} \right\}_{5 \times 1}. \quad (8)$$

Матрица жесткости четырехузловой элемента дискретизации. В качестве узловых варьируемых параметров приняты компоненты вектора перемещения на $(n + 1)$ -м этапе нагружения, первые производные этих компонент и углы поворотов нормали к срединной поверхности на $(n + 1)$ -м этапе нагружения в виде

$$\left\{ U^h \right\}_{1 \times 11}^T = \left\{ w^{1h} \ w_{,x}^{1h} \ w_{,S}^{1h} \ w^{2h} \ w_{,x}^{2h} \ w_{,S}^{2h} \ w^h \ w_{,x}^h \ w_{,S}^h \ \gamma^{1h} \ \gamma^{2h} \right\},$$

$$h = i, j, k, l.$$

Таким образом, размерность матрицы жесткости четырехузловой элемента дискретизации составляет 44×44 .

Для ее компоновки было использовано функциональное равенство возможных и действительных работ внешних и внутренних усилий на $(n + 1)$ -м этапе нагружения

$$L = \int_V \left\{ \left\{ \sigma^{mn} \right\}_{1 \times 5}^T + \frac{1}{2} \left\{ \Delta\sigma^{mn} \right\}_{1 \times 5}^T \right\} \left\{ \Delta\varepsilon_{mn}^{\xi S} \right\}_{5 \times 1} dV - \int_F \left\{ W \right\}_{1 \times 3}^T \left(\left\{ P \right\}_{3 \times 1} + \frac{1}{2} \left\{ \Delta P \right\}_{3 \times 1} \right) dF, \quad (9)$$

где $\left\{ \sigma^{mn} \right\}_{1 \times 5}^T = \left\{ \sigma^{11} \ \sigma^{12} \ \sigma^{13} \ \sigma^{22} \ \sigma^{23} \right\}$ — матрица-строка контравариантных компонент тензора напряжений, накопленных за n этапов последовательного нагружения; $\{P\}$, $\{\Delta P\}$ — матричные обозначения заданных нагрузок за n этапов нагружения и на $(n + 1)$ -м этапе соответственно.

На основе функционала (9) для принятого конечного элемента получена матрица жесткости с узловыми неизвестными в виде перемещений, их первых производных и углов наклонов нормалей к срединной поверхности в узлах конечного элемента. Перемещения аппроксимировались функциями формы с полиномами Эрмита третьей степени. Углы поворота нормалей аппроксимировались билинейными соотношениями.

На основе функционала (9) получены варианты матриц жесткостей элемента, различающиеся использованными определяющими уравнениями (5) и (8), что приводит к возможности выполнения сравнительного анализа их применения в расчетной практике. Система алгебраических уравнений конструкции на шаге нагружения решалась методом Гаусса.

Пример расчета 1. Исследовано напряженное состояние цилиндрической оболочки под действием внутреннего давления интенсивности q при защемлении левого торца и при свободном правом. В качестве материала оболочки использован дюралюминиевый сплав $E = 7.49 \cdot 10^4$ МПа; $\nu = 0.32$. Геометрические размеры цилиндра:

радиус $R = 1.0$ м; длина образующей $L = 0.8$ м; толщина стенки $h = 0.01$ м. Диаграмма деформирования имела линейное упрочнение, определяемое зависимостью

$$\sigma_i = \sigma_i^T + (\epsilon_i - \epsilon_i^T) E_k,$$

где $\sigma_i^T = 200$ МПа; $E_k = \text{tg}\beta$.

При формировании матрицы жесткости четырехузловой элемента дискретизации на $(n + 1)$ -м этапе нагружения была применена система определяющих уравнений на шаге нагружения, представленная выражением (7). В табл. 1 при различных размерах сетки дискретизации рассчитываемой оболочки даются значения окружных σ_{θ} и меридиональных σ_{xx} напряжений в волокнах внутренней (in) и наружной (out) поверхностей опорного сечения оболочки.

Таблица 1. Численные значения напряжений в опорном сечении

Напряжения, МПа	Сетка дискретизации					
	75 × 75	79 × 79	81 × 81	83 × 83	85 × 85	87 × 87
σ_{xx}^{in}	416.4	415.3	418.0	421.2	425.7	427.0
σ_{xx}^{out}	-411.9	-414.6	-416.0	-416.2	-424.3	-425.8
$\sigma_{\theta}^{\text{in}}$	159.6	159.1	160.3	161.8	163.9	164.5
$\sigma_{\theta}^{\text{out}}$	-157.5	-158.8	-159.4	-159.5	-163.2	-163.9

Численные значения напряжений табл. 1 показывают приемлемую сходимость вычислительного процесса.

Сходимость вычислительного процесса по мере увеличения числа этапов нагружения можно проанализировать по данным табл. 2, в которой даются численные значения нормальных напряжений в торцевых сечениях при фиксированной сетке узлов дискретизации рассчитываемой области, принятой 85×85 . Анализ данных, приведенных в табл. 2, свидетельствуют об устойчивой сходимости вычислительного процесса по мере увеличения числа этапов нагружения.

На рис. 1 представлена эпюра нормальных напряжений в левом торце оболочки после 32 шагов нагружения при размере сетки 85×85 . Учитывая, что внешняя нагрузка в виде внутреннего давления приложена нормально к внутренней поверхности оболочки, следует ожидать, что алгебраическая сумма внутренних сил в осевом направлении должна быть равна нулю. Для проверки данного условия равновесия площадь эпюры была разбита на четыре фрагмента и были вычислены растягивающие и сжимающие усилия по величинам площадей данных фрагментов.

Растягивающие усилия оказались равными: $N_1 = 887.5$ КН/м; $N_2 = 360.25$ КН/м. Сжимающие усилия оказались равны $N_3 = -358.4$ КН/м; $N_4 = -884.6$ КН/м. В результате суммирования всех сил можно оценить погрешность вычислений напряжений σ_{xx} в опорном сечении

$$\sum_{i=1}^4 N_i = 887.5 + 360.25 - 358.4 - 884.6 = 4.75 \text{ КН/м.}$$

Таким образом, погрешность оказалась равной

$$\delta = (4.75 / 1247.75) \cdot 100\% = 0.38\%,$$

что подтверждает высокую точность вычислений напряжений по представленному алгоритму.

Таблица 2. Численные значения нормальных напряжений при увеличении числа этапов последовательного нагружения

Сечение	Напряжения, МПа	Число этапов последовательного нагружения				Значения напряжений из условия равновесия
		22	32	42	52	
Опорное	σ_{xx}^{in}	425.7	421.8	421.0	419.7	—
	σ_{xx}^{out}	-424.3	-421.0	-420.0	-419.0	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	163.9	162.1	161.7	161.1	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	-163.2	-161.7	-161.2	-160.8	—
Свободный торец	σ_{xx}^{in}	0.0044	0.0042	-0.0519	-0.0115	0.0000
	σ_{xx}^{out}	-0.0001	0.0001	0.0198	0.1026	0.0000
	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	301.2	301.2	300.2	301.2	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	298.2	298.2	300.3	300.7	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{midl}$	299.7	299.7	298.7	299.7	300.0

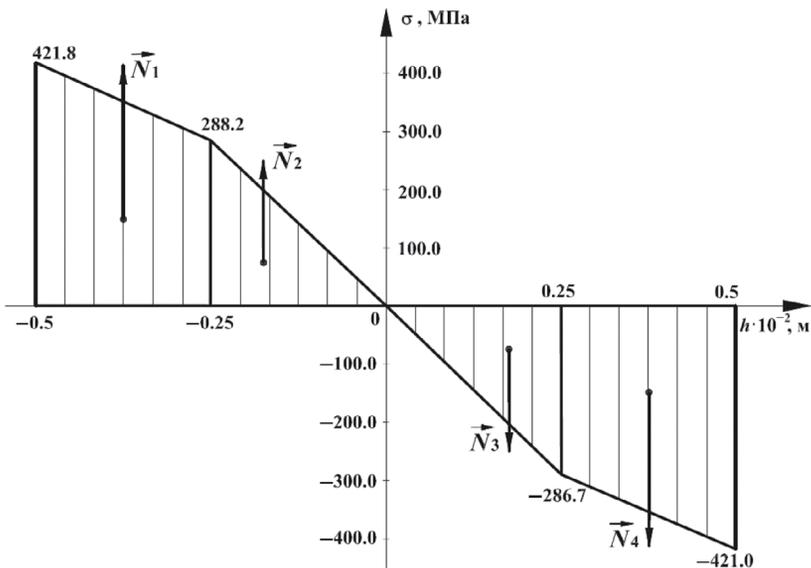


Рис. 1. Эпюра нормальных напряжений в опорном сечении цилиндра.

Пример расчета 2. Определено напряженное состояние оболочки, срединная поверхность которой принята в виде эллиптического цилиндра (рис. 2). Граничные условия и вид нагружения приняты как в примере 1. Параметры эллипса: $b = 1.0$ м; $c = 0.9$ м.

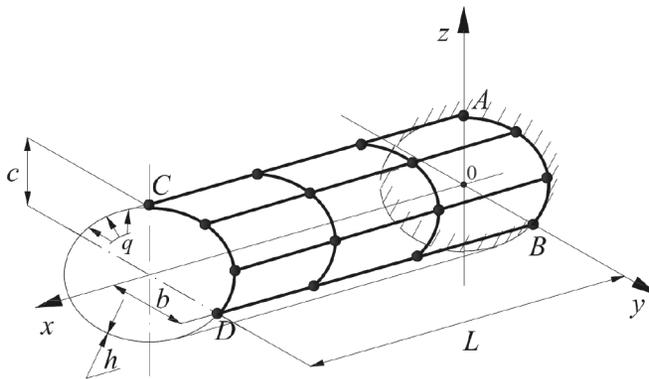


Рис. 2. Расчетная схема эллиптического цилиндра, нагруженного внутренним давлением интенсивности q .

Результаты расчета оболочки при различных размерах сеток дискретизации приведены в табл. 3, где даются численные значения осевых и окружных напряжений в опорном сечении и на свободном торце в точках $A(x = 0; t = 0)$, $B(x = 0; t = \pi/2)$, $C(x = L; t = 0)$ и $D(x = L; t = \pi/2)$.

Анализ результатов табл. 3 подтверждает сходимость процесса вычисления нормальных напряжений по мере сгущения сетки узлов дискретизации. Напряжения σ_{xx} на свободном торце близки к нулю, что и следовало ожидать, т.к. свободный торец не нагружен осевыми силами.

С целью анализа характера распределения нормальных напряжений вдоль образующей эллиптического цилиндра на рис. 3 и 4 построены эпюры осевых σ_{xx} и окружных $\sigma_{\theta\theta}$ напряжений во внутренних и наружных волокнах оболочки при значении параметра t , равном нулю (рис. 3), и при значении параметра t , равном $\pi/2$ (рис. 4). Данные эпюры были получены при использовании сетки узлов 81×81 и количества шагов нагружения, равном 22.

Из анализа представленных эпюр следует, что наибольшей концентрации напряжения σ_{xx} и $\sigma_{\theta\theta}$ достигает в опорном сечении. Причем, напряжения σ_{xx} стремятся к нулю в зоне, которая начинается на расстоянии $3/8 L$ от опорного сечения и заканчивается на свободном торце оболочки. Напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ стабилизируются в вышеуказанной зоне. Такая картина распределения нормальных напряжений вполне соответствует решаемой задаче, что подтверждает корректность разработанного алгоритма реализации предложенного варианта определяющих уравнений на шаге нагружения при упругопластическом деформировании, который можно рекомендовать исследователям и проектировщикам для анализа НДС оболочек при упругопластическом деформировании.

На рис. 5 и 6 представлены графики изменения нормальных напряжений σ_{xx} в жесткой заделке на наружной σ^{out} и внутренней σ^{in} поверхностях оболочки в зависимости от внешней нагрузки в виде внутреннего давления интенсивности q для кругового (рис. 5) и эллиптического (рис. 6) цилиндров при количестве этапов нагружения, равном 22. На графиках отчетливо прослеживается нелинейная зависимость $\sigma_{xx} = f(q)$ при превышении предела текучести материала оболочки.

Таблица 3. Значения нормальных напряжений в эллиптическом цилиндре

Сечение	Координаты точек x (м); t (рад)	Напряжения, МПа	Сетка узлов						Значения напряжений из условия равновесия
			79×79	81×81	83×83	85×85	87×87	89×89	
Опорное	0.00; 0.00	σ_{xx}^{in}	478.3	479.2	481.1	482.3	484.9	487.2	—
		σ_{xx}^{out}	-574.5	-576.0	-578.5	-579.2	-579.8	-582.2	—
		σ_{tt}^{in}	193.30	193.67	194.51	195.12	196.20	197.32	—
		σ_{tt}^{out}	-231.9	-232.9	-233.7	-234.0	-234.3	-235.4	—
	0.00; $\pi/2$	σ_{xx}^{in}	288.8	290.4	291.6	283.8	284.5	285.4	—
		σ_{xx}^{out}	-235.1	-236.7	-238.7	-240.1	-241.1	-242.4	—
		σ_{tt}^{in}	101.2	101.9	102.3	100.4	100.7	101.0	-
		σ_{tt}^{out}	-77.66	-78.22	-78.91	-79.37	-79.72	-80.15	—
Свободный торец	0.80; 0.00	σ_{xx}^{in}	-0.0561	-0.0572	-0.0462	0.0069	0.0861	0.0317	0.000
		σ_{xx}^{out}	-0.0402	-0.0409	-0.0251	-0.0226	-0.0257	-0.0285	0.000
		σ_{tt}^{in}	333.5	333.2	333.0	332.8	332.5	332.0	—
		σ_{tt}^{out}	340.10	340.11	340.11	340.13	340.21	339.91	—
	0.80; $\pi/2$	σ_{xx}^{in}	-0.123	-0.0756	-0.235	-0.188	-0.165	-0.112	0.000
		σ_{xx}^{out}	0.0416	0.0692	-0.0986	-0.0661	-0.0555	-0.0121	0.000
		σ_{tt}^{in}	242.78	242.77	242.52	242.53	242.53	242.61	—
		σ_{tt}^{out}	240.89	240.83	240.61	240.61	240.61	240.72	—

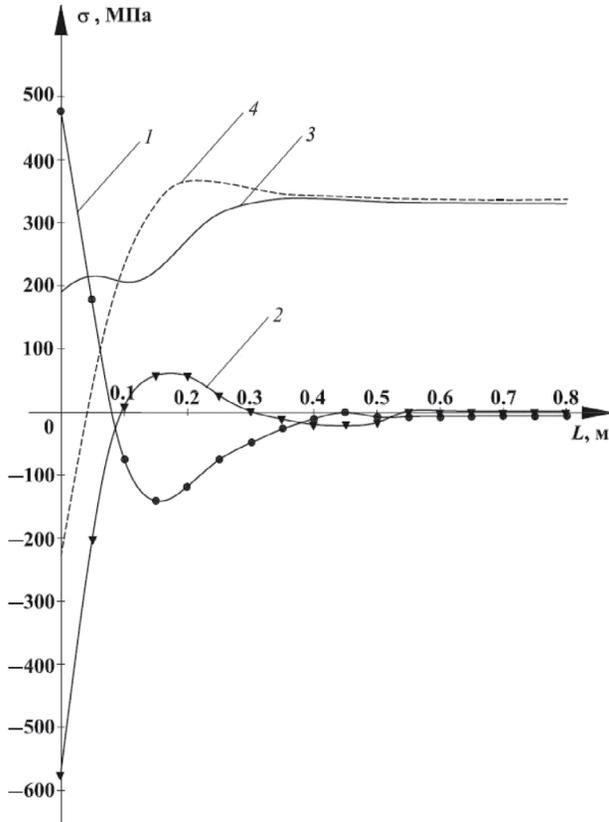


Рис. 3. Эпюры нормальных напряжений σ_{xx} и σ_{tt} в эллиптическом цилиндре вдоль образующей L при $t=0$: 1 — σ_{xx}^{in} ; 2 — σ_{xx}^{out} ; 3 — σ_{tt}^{in} ; 4 — σ_{tt}^{out} .

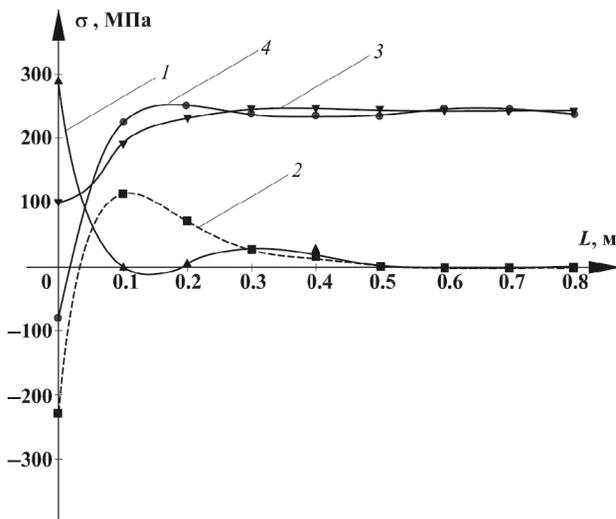


Рис. 4. Эпюры нормальных напряжений σ_{xx} и σ_{tt} в эллиптическом цилиндре вдоль образующей L при $t=\pi/2$: 1 — σ_{xx}^{in} ; 2 — σ_{xx}^{out} ; 3 — σ_{tt}^{in} ; 4 — σ_{tt}^{out} .

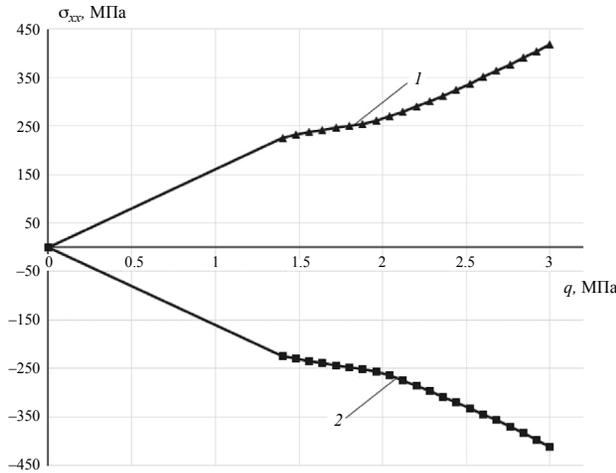


Рис. 5. Кривые изменения нормальных напряжений σ_{xx} в круговом цилиндре: 1 – σ_{xx}^{in} ; 2 – σ_{xx}^{out} .

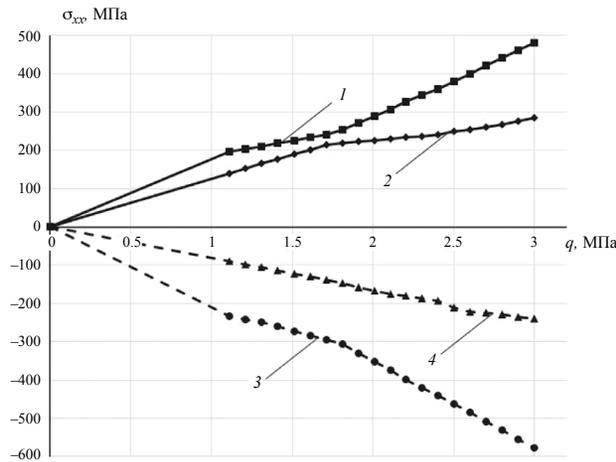


Рис. 6. Кривые изменения нормальных напряжений σ_{xx} в эллиптическом цилиндре: 1 – $\sigma_{xx}^{in}; t = 0$; 2 – $\sigma_{xx}^{in}; t = \frac{\pi}{2}$; 3 – $\sigma_{xx}^{out}; t = 0$; 4 – $\sigma_{xx}^{out}; t = \frac{\pi}{2}$.

С целью выполнения сопоставительного анализа разработанного алгоритма с алгоритмом, основанным на использовании трехмерного конечного элемента в форме треугольной призмы [10], был выполнен расчет кругового цилиндра, описанного в примере 1, при различных вариантах сетки дискретизации с фиксированным числом этапов нагружения, равным 22. Результаты расчетов при использовании трехмерного конечного элемента представлены в табл. 4. Анализ численных значений напряжений (табл. 4) позволяет констатировать удовлетворительную сходимость вычислительного процесса по мере сгущения сетки дискретизации и соответствие напряжений на свободном торце цилиндра напряжениям, вычисленным исходя из условий статического равновесия.

Таблица 4. Значения напряжений в круговом цилиндре при использовании конечного элемента в виде треугольной призмы

Сечение	Напряжения, МПа	Сетка дискретизации				Значения напряжений из условия равновесия
		2 × 41	2 × 61	2 × 85	2 × 89	
Опорное	σ_{xx}^{in}	430.5	434.4	429.7	430.8	—
	σ_{xx}^{out}	-430.4	-434.3	-431.8	-431.3	—
Свободный торец	σ_{xx}^{in}	0.005	0.0056	0.0026	0.0021	0.0000
	σ_{xx}^{out}	0.004	0.0046	0.0012	0.0007	0.0000
	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	301.6	301.7	301.61	301.6	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{midl}$	300.09	300.17	300.09	300.07	300.00
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	298.6	298.7	298.6	298.6	—
	$\sigma_{\xi\xi}^{in}$	-2.997	-2.997	-2.9985	-2.999	-3.00
	$\sigma_{\xi\xi}^{midl}$	-1.488	-1.487	-1.49	-1.491	-1.50
	$\sigma_{\xi\xi}^{out}$	0.005	0.0055	0.0014	0.0008	0.000

Сопоставляя численные значения напряжений, приведенные в третьей колонке табл. 2 и 4, можно отметить их примерное совпадение, что подтверждает эффективность разработанного алгоритма. В то же время следует учитывать, что использование трехмерных конечных элементов существенно увеличивает количество искомым неизвестных, что требует значительно больших ресурсов оперативной памяти применяемой компьютерной техники.

Заключение. Определяющие уравнения первого варианта, полученные дифференцированием соотношений деформационной теории пластичности, отличаются громоздкостью даже при неизменной метрике в процессе деформирования оболочки. При учете изменения метрики при деформировании оболочки трудности получения определяющих уравнений на шаге нагружения еще более возрастают.

Определяющие уравнения второго варианта деформированного состояния оболочки, полученные на шаге нагружения без использования операции разделения приращений на упругую и пластическую части, практически идентичны при неизменной и изменяющейся метрике процесса деформирования.

Итак, использование определяющих уравнений второго варианта в расчетах оболочек при упругопластическом деформировании является предпочтительным.

Финансирование. Данная работа финансировалась за счет средств бюджета Волгоградского государственного технического университета и Волгоградского государственного аграрного университета. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

Конфликт интересов. Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chernykh K. F.* Nonlinear elasticity. St. Petersburg: Solo, 2004. (In Russ.)
2. *Malinin N. N.* Applied theory of plasticity and creep. M.: Yurayt, 2019. (In Russ.)
3. *Bishop J.* A displacement-based finite element formulation for general polyhedra using harmonic shape functions // Internat. J. Numer. Methods Engrg. 2014. V. 97 (1). P. 1.
4. *Klochkov Y. V., Nikolaev A. P., Kiseleva T. A., Marchenko S. S.* Comparative Analysis of the Results of Finite Element Calculations Based on an Ellipsoidal Shell // J. of Mach. Manuf. and Reliab. 2016. V. 45 (4). P. 328.
5. *Javili A., Mc Bride A., Steinmann P., Reddy B. D.* A unified computational framework for bulk and surface elasticity theory: a curvilinear-coordinate based finite element methodology // Comput. Mech. 2014. V. 54 (3). P. 745.
6. *Ren H.* Fast and robust full-guad-rature triangular elements for thin plates/ shells, with large deformations and large rotations. // Trans. ASME. J. Comput. and Nonlinear Dyn. 2015. V. 10 (5). P. 051018/1.
7. *Nguyen N., Waas A.* Nonlinear, finite deformation, finite element analysis // ZAMP. Z. Angew. Math. and Phys. 2016. V. 67 (9). P. 35/1.
8. *Hanslo P., Larson Mats G., Larson F.* Tangential differential calculus and the finite element modeling of a large deformation elastic membrane problem // Comput. Mech. 2015. V. 56 (1). P. 87.
9. *Lei Zh., Gillot F., Jezeguel L.* Developments of the mixed grid isogeometric Reissner-Mindlin shell: serendipity basis and modified reduced // Int. J. Mech. 2015. V. 54. P. 105.
10. *Klochkov Yu., Nikolaev A., Vakhnina O., Sobolevskaya T., Klochkov M.* Physically Nonlinear Shell Deformation Based on Three-Dimensional Finite Elements // Magazine of Civil Engineering. 2022. V. 5 (113). P. 11314.