

---

## НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

---

УДК 539.375

### МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗРУШЕННЫХ ОДНОНАПРАВЛЕННЫХ ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ ЛИНЕЙНОГО СЦЕПЛЕНИЯ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ СДВИГЕ

© 2025 г. Р.К. Мехтиев<sup>1, 2</sup>

<sup>1</sup>Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности,  
Баку, Азербайджан

<sup>2</sup>Западно-Каспийский Университет, Баку, Азербайджан  
e-mail: rafail60mehtiev@mail.ru

Поступила в редакцию 07.06.2024 г.

После доработки 11.10.2024 г.

Принята к публикации 20.10.2024 г.

В статье рассмотрен случай поперечной плоскости сдвига с прямолинейными трещинами сцепления, коллинеарными осям  $X$  и  $Y$ , ослабленной двумя двоякопериодическими круглыми отверстиями и армированными наполнителями. В процессе решения задачи ставится цель определить коэффициент интенсивности напряжений на концах трещин. Для этого задаются граничные условия по контуру круглых отверстий и заполняющим материалам. При этом на краях трещин задаются граничные условия. В процессе решения задачи с использованием функций с комплексными переменными получена система бесконечных линейных уравнений по контуру круглых отверстий. На берегах трещин получены сингулярные интегральные уравнения по заданным граничным условиям. Метод Гаусса используется для решения сингулярных интегральных методов в системе конечных алгебраических методов. Одновременно была построена 3D-модель. Установлено, что напряжения в плоскости в состоянии интенсивной деформации имеют большие значения в конце трещин.

**Ключевые слова:** двоякопериодическая решетка, жесткое волокно, средние напряжения, линейные алгебраические уравнения, сингулярные уравнения, когезионные трещины, поперечный сдвиг, напряжения в связях, 3D-модель

**DOI:** 10.31857/S0235711925010071, **EDN:** EQKYFH

По мере увеличения внешней нагрузки в плоскости вокруг отверстий образуются зоны повышенных напряжений, расположение которых имеет двоякопериодический характер. В зонах повышенных напряжений могут возникать трещины. Задача о зарождении трещины является важной задачей механики повреждений [1, 5, 10–12]. Постановка этой задачи существенно расширяет первоначальную концепцию А. Гриффита, согласно которой в материале всегда имеется большое количество мельчайших трещин. Образование (зарождение) трещины под нагрузкой соответствует данным фрактографических наблюдений. По мере увеличения интенсивности внешней нагрузки возле отверстий возникают зоны предразрушения, которые моделируются областями с ослабленными межчастичными связями в материале. Взаимодействие берегов этих зон моделируется путем введения между берегами

зоны предразрушения связей с заданной диаграммой деформирования. Физическая природа таких связей и размеры зон предразрушения зависят от вида материала. Так как эти зоны (прослойки перенапряженного материала) малы по сравнению с остальной частью изотропной среды, ослабленной двоякопериодической системой круговых отверстий, их можно мысленно удалить, заменив разрезами, поверхности которых взаимодействуют между собой по некоторому закону, соответствующему действию удаленного материала.

Анализ предельного равновесия зоны предразрушения при поперечном сдвиге выполняется на основе критерия предельного сдвига связей материала и включает: 1) установление зависимости сил сцепления от сдвига берегов зоны предразрушения; 2) оценку напряженного состояния вблизи зоны предразрушения с учетом внешних нагрузок и сил сцепления, а также расположения жестких включений; 3) определение зависимости критических внешних нагрузок от геометрических параметров составной среды, при которых появляется трещина.

**Формулировка задачи.** Представьте себе изотропную среду, ослабленную двоякопериодической системой радиусов круглых отверстий  $\lambda$  ( $\lambda < 1$ ) и центрируется в точках

$$P_{mn} = m\omega_1 + n\omega_2, \quad \omega_1 = 2, \quad \omega_2 = \omega_1 h e^{i\alpha},$$

где  $h > 0$ ,  $\operatorname{Im} \omega_2 > 0$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

Круговые отверстия среды заполнены абсолютно жесткими включениями, спаянными вдоль обвода. Рассматриваемая поверхность подвергается поперечному сдвигу сил  $\tau_{xy}^\infty$  (рис. 1). В рассматриваемом случае возникновение зародышевой трещины в среде, ослабленной двумя двоякопериодической системой круглых отверстий, является процессом перехода зоны предразрушения в зону нарушенных связей между поверхностями материала.

Предлагается модель зарождения трещин в композитах с двоякопериодической структурой, основанная на рассмотрении зоны процесса трещинообразования. Полагается, что зона процесса трещинообразования представляет собой слой конечной длины, содержащий материал с частично нарушенными связями между отдельными структурными элементами. Наличие связей между берегами зоны предразрушения (зоны ослабленных межчастичных связей материала) моделируется приложением к поверхности зоны предразрушения сил сцепления, вызванных присутствием связей.

Учет этих эффектов в задачах механики разрушения является важной, но очень сложной задачей.

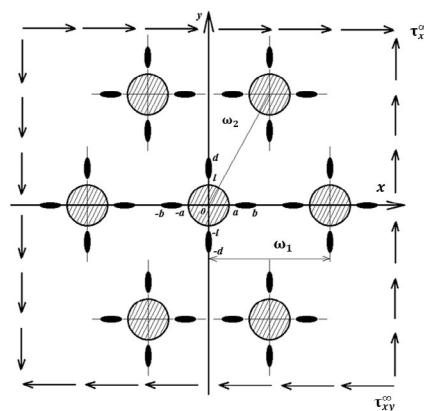


Рис. 1. Схема расчета задачи зарождения трещины в среде с жесткими включениями при поперечном сдвиге.

В исследуемом случае возникновение зародышевой трещины в среде, ослабленной двоякопериодической системой круговых отверстий, представляет собой процесс перехода области предразрушения в область разорванных связей между поверхностями материала. При этом размер зоны предразрушения заранее неизвестен и подлежит определению.

Исследования возникновения областей с нарушенной структурой материала показывают, что в начальной стадии зоны предразрушения представляют собой узкий вытянутый слой, а затем с ростом нагрузки внезапно появляется вторичная система зон, содержащих материал с частично нарушенными связями.

Для математического описания зарождения трещины в изотропной среде, ослабленной двоякопериодической системой круговых отверстий, заполненных жесткими включениями в рассматриваемом случае, приходим к задаче теории упругости для среды, когда в среде имеются зоны предразрушения. Зоны предразрушения ориентированы в направлении максимальных касательных напряжений. Считается, что в изотропной среде имеются две двоякопериодические системы прямолинейных зон предразрушения, коллинеарных осям абсцисс и ординат неравной длины.

Волокна обеспечивают прочность и жесткость композита в направлении расположения волокон. Механические свойства и механизм разрушения композита определяются соотношением трех параметров: 1) прочностью волокон; 2) прочностью и жесткостью матрицы; 3) прочностью связи волокно–матрица.

Они используются в машиностроении, особенно транспортном, включая авиастроение, приборостроение, в электро- и радиотехнике, электронике, строительстве, сельском хозяйстве, медицине, спорте, для изготовления изделий бытового назначения. Основу волокнистых композиционных материалов составляют армирующие волокнистые наполнители (АВН), объединенные в монолитный композиционный материал матрицей — вторым важным компонентом.

Дать какое-либо обобщенное описание всех волокнистых структур, применяемых в качестве АВН, просто невозможно — их множество в связи с многочисленными прикладными задачами создания из них материалов и изделий с самыми разнообразными характеристиками. Каждая из перечисленных волокнистых структур имеет большое число вариантов, зависящих от технологии их получения и заданных свойств. Таким образом, используя различные виды АВН и технологические приемы их расположения в волокнистом композите, можно оптимизировать расположение армирующих волокон или нитей и добиться такого наиболее рационального варианта, при котором большая часть армирующих волокон расположена в направлении главных действующих механических напряжений в условиях эксплуатации.

При действии внешней нагрузки на составное тело в связях, соединяющих берега зон предразрушения, возникают касательные усилия  $q_x(x)$  и  $q_y(y)$  соответственно. Эти напряжения заранее неизвестны и подлежат определению из решения краевой задачи механики разрушения по граничным условиям, выражающим отсутствие упругих смещений вдоль обвода круговых отверстий, и условиям на берегах зон предразрушения соответственно [2, 6, 7]:

— в контурах круглых отверстий

$$u + i\psi = 0; \quad (1)$$

— на краях зон предразрушения:

— коллинеарная ось  $X$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = -iq_x(x); \quad (2)$$

— коллинеарная ось  $Y$

$$\sigma_x - i\tau_{xy} = -iq_y(y).$$

Соотношения, связывающие касательные силы в связях и смещения края предварительно поврежденных участков, должны подтверждать основные отношения задачи. Без ограничения общности представим эти соотношения следующим образом:

$$u^+(x, 0) - u^-(x, 0) = Q(x, q_x(x))q_x(x); \quad (3)$$

$$v^+(0, y) - v^-(0, y) = Q(y, q_y(y))q_y(y), \quad (4)$$

где функции  $Q(x, q_x(x))$  и  $Q(y, q_y(y))$  — эффективное соблюдение ограничений;  $(u^+ - u^-)$  — смещение края предразрушительных зон коллинеарной оси абсцисс;  $(v^+ - v^-)$  — смещение края зон предразрушения коллинеарной оси ординат.

Для определения предельной величины внешней нагрузки, при которой происходит зарождение трещины, постановку задачи необходимо дополнить условием (критерием) появления трещины (разрыва межчастичных связей в материале). В качестве такого условия примем критерий критического сдвига берегов зоны предразрушения

$$\begin{aligned} u^+ - u^- &= \delta_{Hc} \text{ на } L_1, \\ v^+ - v^- &= \delta_{Hc} \text{ на } L_2, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\delta_{Hc}$  — характеристика сопротивления материала среды трещинообразованию;  $L_1$  — совокупность зон предразрушения, коллинеарных оси абсцисс;  $L_2$  — совокупность зон предразрушения, коллинеарных оси ординат.

**Метод решения задачи.** Для решения задачи естественным образом объединяется метод, развитый при решении периодической упругой задачи, с методом [6] построения в явной форме потенциалов Колосова—Мусхелишвили, соответствующих неизвестным касательным смещениям вдоль зон предразрушения.

В теории упругости мы можем описать напряжение и смещение с помощью двух аналитических функций  $z = x + iy$  [9].  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  с помощью формулы Колоссовой—Мушелишвили

$$\begin{aligned} \sigma_y + \sigma_x &= \sigma_r + \sigma_\theta = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= e^{-2i\theta}(\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta}) = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)], \\ 2\mu(u + iv) &= \kappa\varphi(z) - z\overline{\Phi(z)} - \overline{\psi(z)}, \\ \varphi'(z) &= \Phi(z), \psi'(z) = \Psi(z), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\mu$  — модуль сдвига материала;  $v$  — коэффициент Пуассона;  $\kappa = 3 - 4v$  — для плоской деформации;  $\kappa = (3 - v)/(1 + v)$  — для плоского напряженного состояния;  $r$ ,  $\theta$  — полярные координаты.

На основании формул Колосова—Мусхелишвили (6) и граничных условий на контурах круговых отверстий (1) и берегах зон предразрушения (2) задача сводится к отысканию двух аналитических в области  $D$  функций  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  из краевых условий

$$\varepsilon\overline{\Phi(\tau)} + \Phi(\tau) - [\bar{\tau}\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)]e^{2i\theta} = 0; \quad (7)$$

$$\Phi(t) + \overline{\Phi(\bar{t})} + i\overline{\Phi'(\bar{t})} + \overline{\Psi(\bar{t})} = -iq_x(t), \quad (8)$$

$$\Phi(t_1) + \overline{\Phi(\bar{t}_1)} + t_1\overline{\Phi'(\bar{t}_1)} + \overline{\Psi(\bar{t}_1)} = -iq_y(t_1),$$

где  $\tau = \lambda e^{i\theta} + m\omega_1 + n\omega_2$ ,  $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;  $t, t_1$  — аффиксы точек края зон предразрушения, коллинеарных осей абсцисс и ординат, соответственно.

Постановка задачи требует одновременно жестких включений ( $\varepsilon = -k$ ) и исключения отверстий ( $\varepsilon = 1$ ).

Решение краевой задачи ищется в виде (7)–(8)

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z) + \Phi_3(z), \quad (9)$$

$$\Psi(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z) + \Psi_3(z);$$

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\omega} \int_{L_1} g(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega}(t-z) dt, \quad (10)$$

$$\Psi_1(z) = -\frac{\pi z}{2\omega^2} \int_{L_1} g(t) \sin^{-2} \frac{\pi}{\omega}(t-z) dt,$$

$$\Phi_2(z) = \frac{i}{2\omega} \int_{L_2} g_1(t_1) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega}(it_1 - z) dt_1,$$

$$\Psi_2(z) = -\frac{i}{2\omega} \int_{L_2} \left\{ g_1(t_1) \left[ 2\operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega}(it_1 - z) + \frac{\pi}{\omega}(2t_1 + iz) \sin^2 \frac{\pi}{\omega}(it_1 - z) \right] \right\} dt_1;$$

$$\Phi_3(z) = i\tau_{xy}^{\infty} + i \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} + i\alpha_0, \quad (11)$$

$$\Psi_3(z) = i\tau_{xy}^{\infty} + i \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} - i \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} S^{(2k+1)}(z)}{(2k+1)!},$$

$$\text{где } \rho(z) = \left( \frac{\pi}{\omega} \right)^2 \sin^{-2} \left( \frac{\pi}{\omega} z \right) - \frac{1}{3} \left( \frac{\pi}{\omega} \right)^2; \quad S(z) = \sum_m \left[ \frac{P_m}{(z - P_m)^2} - \frac{2z}{P_m} - \frac{1}{P_m} \right] - \text{простое}$$

число означает, что сумма исключает индекс ( $m = 0$ ); интегралы в (10) берутся по прямым;  $L_1 = [-b, -a] \cup [a, b]$ ;  $L_2 = [-d, -l] \cup [l, d]$ ;  $g(t)$  и  $g_1(t_1)$  — искомые функции, характеризующие сдвиг края зон предразрушения

$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{2\mu i}{1+\kappa} \frac{d}{dx} \left[ u^+(x, 0) - u^-(x, 0) \right] \text{ на } L_1, \\ g_1(y) &= \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{d}{dy} \left[ v^+(0, y) - v^-(0, y) \right] \text{ на } L_2. \end{aligned} \quad (12)$$

К соотношениям (9)–(12) необходимо добавить дополнительные условия, вытекающие из физического смысла задачи

$$\int_{-b}^{-a} g(t) dt = 0, \int_a^b g(t) dt = 0, \int_{-d}^{-l} g_1(t_1) dt_1 = 0, \int_l^d g_1(t_1) dt_1 = 0. \quad (13)$$

Приведем зависимости, которым должны удовлетворять коэффициенты выражений (9)–(11).

Из условий антисимметричности относительно осей координат находим:

$$\operatorname{Im} \alpha_{2k} = 0, \operatorname{Im} \beta_{2k} = 0, (k = 1, 2, \dots).$$

Следующее вытекает из условий постоянства главного вектора всех сил, действующих на данный момент, соединяя две конгруэнтные точки в  $D$  [8]

$$\alpha_0 = \frac{\pi^2}{24} \beta_2 \lambda^2.$$

При фундаментальной (13) функции (9)–(11) определяют класс задач с двоякопериодическими нагрузками.

Нетрудно убедиться, что функции (9)–(11) при условии (13) определяют класс задач периодическим распределением напряжений. Неизвестные функции  $g(x)$  и  $g_1(y)$ , и постоянные  $\alpha_{2k}$  и  $\beta_{2k}$  должны быть определены из краевых условий (7) и (8).

В силу выполнения условий периодичности системы граничных условий (7) заменяется одним функциональным уравнением, например, на контуре  $\tau = \lambda e^{i\theta}$ , а система граничных условий (8) — краевыми условиями на контурах  $L_1$  и  $L_2$ .

Для составления уравнений относительно коэффициентов  $\alpha_{2k}$ ,  $\beta_{2k}$  функций  $\Phi_3(z)$  и  $\Psi_3(z)$  представим граничное условие (7) в виде

$$\varepsilon \overline{\Phi_3(\tau)} + \Phi_3(\tau) - [\bar{\tau}\Phi'_3(\tau) + \Psi_3(\tau)]e^{2i\theta} = f_1(\theta) + if_2(\theta) + \varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta); \quad (14)$$

$$f_1(\theta) + if_2(\theta) = -\varepsilon \overline{\Phi_1(\tau)} - \Phi_1(\tau) + e^{2i\theta} [\bar{\tau}\Phi'_1(\tau) + \Psi_1(\tau)], \quad (15)$$

$$\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta) = -\varepsilon \overline{\Phi_2(\tau)} - \Phi_2(\tau) + e^{2i\theta} [\bar{\tau}\Phi'_2(\tau) + \Psi_2(\tau)].$$

Относительно функций  $f_1(\theta) + if_2(\theta)$ , и  $\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta)$  будем считать, что они разлагаются на  $|\tau| = \lambda$  в ряды Фурье. В силу антисимметрии эти ряды имеют вид

$$\begin{aligned} f_1(\theta) + if_2(\theta) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k} e^{2ik\theta}, \operatorname{Re} A_{2k} = 0, \\ A_{2k} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f_1(\theta) + if_2(\theta)] e^{-2ik\theta} d\theta, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ \varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_{2k} e^{2ik\theta}, \operatorname{Re} B_{2k} = 0, \\ B_{2k} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta)] e^{-2ik\theta} d\theta, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned} \quad (16)$$

Подставив сюда соотношения (12) и поменяв порядок интегрирования, после вычисления интегралов с помощью теории вычетов, находим

$$A_{2k} = -\frac{1}{2\omega} \int_{L_1} g(t) f_{2k}(t) dt, f_0(t) = (1 + \varepsilon) \gamma(t), \gamma(t) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} t, f_2(t) = -\frac{\lambda^2}{2} \gamma^{(2)}(t),$$

$$f_{2k}(t) = -\frac{\lambda^{2k} (2k-1)}{(2k)!} \gamma^{(2k)}(t) + \frac{\lambda^{2k-2}}{(2k-3)!} \gamma^{(2k-2)}(t), (k = 2, 3, \dots),$$

$$f_{-2k}(t) = \frac{\varepsilon \lambda^{2k}}{(2k)!} \gamma^{(2k)}(t), (k = 1, 2, 3, \dots), B_{2k} = -\frac{i}{2\omega} \int_{L_2} g_1(t_1) \varphi_{2k}(it_1) dt_1,$$

$$\varphi_0(it_1) = \frac{1}{2} (1 + \varepsilon) [\delta(it_1) - \overline{\delta(it_1)}], \delta(it_1) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (it_1),$$

$$\varphi_2(it_1) = -\frac{\lambda^2}{2} \delta^{(2)}(it_1) + 2 [\delta(it_1) - it\delta'(it_1)],$$

$$\varphi_{2k}(it_1) = \frac{(1-2k)\lambda^{2k}}{(2k)!} \delta^{(2k)}(it_1) + \frac{2\lambda^{2k-2}}{(2k-2)!} [\kappa \delta^{(2k-2)}(it_1) - it_1 \delta^{(2k-1)}(it_1)], (k = 2, 3, \dots),$$

$$\varphi_{-2k}(it_1) = -\frac{\varepsilon \lambda^{2k}}{(2k)!} \overline{\delta^{(2k)}(it_1)}, (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Подставив в левую часть краевого условия (14) вместо  $\Phi_3(\tau)$ ,  $\overline{\Phi_3(\tau)}$ ,  $\Phi'_3(\tau)$  и  $\Psi_3(\tau)$  их разложения в ряды Лорана в окрестности  $z = 0$ , а в правую часть (14) ряды Фурье (16), и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $e^{i\theta}$ , получим две бесконечные системы алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $\alpha_{2k}$  и  $\beta_{2k}$

$$\begin{aligned}
i\alpha_{2j+2} &= \sum_{j=0}^{\infty} ia_{j,k} \alpha_{2k+2} + b_j, (j = 0, 1, 2, \dots), \\
a_{j,k} &= \frac{1}{\varepsilon} (2j+1) \gamma_{j,k} \lambda^{2k+2j+2}, \gamma_{0,0} = \frac{3}{8} g_2 \lambda^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2i+1) g_{i+1}^2 \lambda^{4i+2}}{2^{4i+4}}, \\
\gamma_{j,k} &= -\frac{(2j+2k+2)! g_{j+k+1}}{(2j+1)!(2k+1)! 2^{2j+2k+2}} + \frac{(2j+2k+4)! g_{j+k+2} \lambda^2}{(2j+2)!(2k+2)! 2^{2j+2k+4}} + \\
&\quad + \frac{g_{j+1} g_{k+1} \lambda^2}{2^{2j+2k+4}} \left[ 1 + \frac{(1+\varepsilon)^2 K_2 \lambda^2}{1 - (1+\varepsilon) K_2 \lambda^2} \right] + \\
&+ \varepsilon \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+1)! (2k+2i+1)! g_{j+k+i} g_{k+i+1} \lambda^{4i+2}}{(2j+1)!(2k+1)! (2i+1)! (2i)! 2^{2j+2k+4i+4}}, (j, k = 1, 2, \dots), \\
\varepsilon b_j &= A'_{2j+2} - \frac{(2j+1) g_{j+1} \lambda^{2k+2}}{(1 - (1+\varepsilon) K_2) 2^{2j+2}} A'_0 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+3)! g_{j+k+2} \lambda^{2j+2k+4}}{(2j)!(2k+3)! 2^{2j+2k+4}} A'_{-2k+2}, \\
g_j &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2j}}, (j = 1, 2, \dots), K_2 = \frac{\pi^2}{24}, A'_0 = A_0 + B_0 - 2i\tau_{xy}^{\infty}, \\
A'_2 &= A_2 + B_2 + i\tau_{xy}^{\infty}, A'_{2k} = A_{2k} + B_{2k}, (k = -1, \pm 2, \dots).
\end{aligned} \tag{17}$$

Коэффициенты  $\beta_{2k}$  определяются соотношениями

$$i\beta_{2k} = \frac{1}{1 - (1+\varepsilon) K_2 \lambda^2} \left[ -A'_0 + (1+\varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_{k+1} \lambda^{2k+2} i\alpha_{2k+2}}{2^{2k+2}} \right], \tag{18}$$

$$i\beta_{2j+4} = i(2j+3) \alpha_{2j+2} + \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+3)! g_{j+k+2} \lambda^{2j+2k+4}}{(2j+2)!(2k+1)! 2^{2j+2k+4}} i\alpha_{2k+2} - A'_{-2j-2}.$$

Требуя, чтобы функции (9)–(11) удовлетворяли краевому условию на берегу зоны предразрушения  $L_1$ , получаем сингулярное интегральное уравнение относительно  $g(x)$  [5]

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\omega} \int_{L_1} g(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (t-x) dt + H(x) &= -iq_x(x), \\
H(x) &= \Phi_s(x) + \overline{\Phi_s(x)} + x \overline{\Phi'_s(x)} + \overline{\Psi_s(x)}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Аналогично, удовлетворяя граничному условию на линии  $L_2$ , после некоторых преобразований получаем еще одно сингулярное интегральное уравнение относительно искомой функции  $g_1(y)$ :

$$\begin{aligned}
-\frac{\pi}{\omega^2} \int_{L_2} g_1(t) \left[ (t-y) \operatorname{sh}^{-2} \frac{\pi}{\omega} (t-y) \right] dt + N(y) &= -iq_y(y), \\
N(y) &= \Phi_0(iy) + \overline{\Phi_0(iy)} + (iy) \overline{\Phi'_0(iy)} + \overline{\Psi_0(iy)}, \\
\Phi_0(z) &= \Phi_1(z) + \Phi_3(z), \Psi_0(z) = \Psi_1(z) + \Psi_3(z).
\end{aligned} \tag{20}$$

Системы (17) и (18) совместно с сингулярными интегральными уравнениями (19) и (20) являются основными разрешающими уравнениями задачи, позволяющими определить функции  $g(x)$ ,  $g_1(y)$  и коэффициенты  $\alpha_{2k}$ ,  $\beta_{2k}$ .

**Методика численного решения и анализ.** Воспользовавшись разложением функций  $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} z$ ,  $\operatorname{sh}^{-2} \frac{\pi}{\omega} z$  в основной полосе периодов, а также используя замену переменных, сингулярные интегральные уравнения после некоторых преобразований приводим к стандартному виду. Используя квадратурные формулы, сводим основные разрешающие уравнения (17), (18)–(20) к совокупности двух бесконечных систем линейных алгебраических уравнений и к двум конечным алгебраическим системам относительно приближенных значений  $p_k^0 = g(\eta_k)$  ( $k = 1, 2, \dots, M$ ),  $R_v^0$  ( $v = 1, 2, \dots, M$ ) искомых функций в узловых точках

$$\sum_{v=1}^M A_{m,v} p_v^0 - \frac{1}{2} H_*(\eta_m) = -iq_x(\eta_m), \quad (m = 1, 2, \dots, M-1), \quad (21)$$

$$\sum_{v=1}^M A_{m,v} \frac{p_k^0}{\sqrt{1/2(1-\lambda_1^2)(\tau_v+1)+\lambda_1^2}} = 0;$$

$$\sum_{v=1}^M B_{m,v} R_v^0 + \frac{1}{2} N_*(\eta_m) = -iq_y(\eta_m), \quad (m = 1, 2, \dots, M-1). \quad (22)$$

Здесь

$$A_{m,v} = \frac{1}{2M} \left[ \frac{1}{\sin \theta_m} \operatorname{ctg} \frac{\theta_m + (-1)^{|m-v|} \theta_v}{2} + B(\eta_m, \tau_v) \right];$$

$$\theta_m = \frac{2m-1}{2M} \pi, \quad (m = 1, 2, \dots, M); \quad \tau_m = \cos \theta_m; \quad \eta_m = \tau_m; \quad \lambda_1 = \frac{a}{\ell};$$

$$B(\eta, \tau) = -\frac{1-\lambda_1^2}{2} \sum_{j=0}^{\infty} g_{j+1} \left( \frac{\ell}{2} \right)^{2j+2} \cdot u_0^j A_j;$$

$$A_j = \left[ (2j+1) + \frac{(2j+1)(2j)(2j-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left( \frac{u}{u_0} \right) + \dots + \right.$$

$$\left. + \frac{(2j+1)(2j)(2j-1) \dots [(2j+1) - (2j+1-1)]}{1 \cdot 2 \dots (2j+1)} \cdot \left( \frac{u}{u_0} \right)^j \right];$$

$$u = \frac{1-\lambda_1^2}{2} (\tau + 1) + \lambda_1^2; \quad u_0 = \frac{1-\lambda_1^2}{2} (\eta + 1) + \lambda_1^2;$$

$$B_{mv} = \frac{1}{2M} \left[ \frac{1}{\sin \theta_m} \operatorname{ctg} \frac{\theta_m + (-1)^{|m-v|} \theta_v}{2} + B_*(\eta_m, \tau_v) \right];$$

$$B_*(\eta, \tau) = -\frac{1-\lambda_2^2}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (2j+1) g_{j+1} \left( \frac{r}{2} \right)^{2j+2} \cdot u_1^j A'_j;$$

$$A'_j = \left\{ (2j+1) + \frac{(2j+1)(2j)(2j-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left( \frac{u_1}{u_2} \right) + \dots + \left( \frac{u_1}{u_2} \right)^j \right\};$$

$$u_1 = \frac{1 - \lambda_2^2}{2} (\tau + 1) + \lambda_2^2; u_2 = \frac{1 - \lambda_2^2}{2} (\eta + 1) + \lambda_2^2; \lambda_2 = \frac{B}{r}.$$

В правую часть полученных систем входят неизвестные напряжения  $q_x(\eta_m)$  и  $q_y(\eta_m)$  в узловых точках, принадлежащих зонам предразрушения. Используя полученное решение, уравнения (12) представим в виде

$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{2\mu i}{1 + \kappa} \frac{d}{dx} \left[ Q(x, q_x(x)) q_x(x) \right], \\ g_l(y) &= \frac{2\mu}{1 + \kappa} \frac{d}{dy} \left[ Q(y, q_y(y)) q_y(y) \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Эти уравнения служат для определения усилий в связях между берегами зон предразрушения. Для построения недостающих уравнений потребуем выполнения условий (2) в узловых точках, принадлежащих зонам предразрушения. При этом используем метод конечных разностей. В результате получим еще две системы из  $M$  уравнений, каждая для определения приближенных значений  $q_x(\eta_m)$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ) и  $q_y(\eta_m)$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ). Так как в перфорированном теле напряжения ограничены, то решение сингулярных интегральных уравнений следовало бы искать в классе всюду ограниченных функций. Следовательно, к системам (21), (22) следует добавить условия ограниченности напряжений у вершин зон предразрушения

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^M (-1)^{k+M} p_k^0 \operatorname{tg} \frac{\theta_k}{2} &= 0, \quad \sum_{k=1}^M (-1)^k p_k^0 \operatorname{ctg} \frac{\theta_k}{2} = 0, \\ \sum_{v=1}^M (-1)^{v+M} R_v^0 \operatorname{tg} \frac{\theta_v}{2} &= 0, \quad \sum_{v=1}^M (-1)^v R_v^0 \operatorname{ctg} \frac{\theta_v}{2} = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Полученные системы уравнений (17), (18), (21)–(24) полностью определяют решение задачи. Для численной реализации изложенного способа были выполнены расчеты. Каждая из бесконечных систем урезалась до пяти уравнений. В численных расчетах полагалось  $M = 30$ , что соответствует разбиению интервала интегрирования на 30 чебышевских узлов. Так как размеры зон предразрушения неизвестны, разрешающая алгебраическая система уравнений (17), (18), (21)–(24) задачи является нелинейной даже при линейных связях. Для ее решения используется метод последовательных приближений, суть которого состоит в следующем: решаем объединенную алгебраическую систему при некоторых определенных значениях размеров зон предразрушения относительно остальных неизвестных. Остальные неизвестные входят в разрешающую систему линейным образом. Принятые значения размеров зон предразрушения и соответствующие значения остальных неизвестных не будут, вообще говоря, удовлетворять условиям ограниченности напряжений у вершин зон предразрушения. Поэтому, подбирая значения размеров зон предразрушения, будем многократно повторять вычисления до тех пор, пока условия ограниченности напряжений (24) не будут удовлетворяться с заданной точностью. В случае нелинейного закона деформирования связей для определения касательных усилий в зонах предразрушения использовался итерационный алгоритм, подобный методу упругих решений [9].

Считается, что закон деформирования межчастичных связей в зоне предразрушения линейный при  $(u^+ - u^-) \leq u_*$  и  $(v^+ - v^-) \leq v_*$ . Первый шаг итерационного процесса счета состоит в решении системы уравнений для линейно-упругих связей.

Следующие итерации выполняются только в случае, если на части зоны предразрушения имеет место неравенство  $(u^+ - u^-) > u_*$  или  $(v^+ - v^-) > v_*$ . Для таких итераций решается система уравнений в каждом приближении для квазиупругих связей с изменяющейся вдоль берегов зоны предразрушения и зависящей от величины усилий в связях эффективной податливости, которая вычислена на предыдущем шаге расчета. Расчет эффективной податливости проводится подобно определению секущего модуля в методе переменных параметров упругости [4]. Процесс последовательных приближений заканчивается, когда усилия вдоль зоны предразрушения, полученные на двух последовательных итерациях, практически не различаются. Нелинейная часть кривой деформирования связей аппроксимировалась билинейной зависимостью [8], восходящий участок которой соответствовал деформированию связей  $(0 < (u^+ - u^-) \leq u_*)$  с их максимальным усилием связей. При  $(u^+ - u^-) > u_*$  закон деформирования описывался нелинейной зависимостью, определяемой точками  $(u_*, \tau_*)$  и  $(\delta_c, \tau_c)$ , причем при  $\tau_c \geq \tau_*$  имело место возрастающая линейная зависимость (линейное упрочнение, соответствующее упругопластической деформации связей).

Для определения предельно равновесного состояния среды, при котором появляется трещина, используем условие (5). Используя полученное решение, условиями, определяющими предельную внешнюю нагрузку, найдены следующие [2, 3]

$$Q(r, q_y(r))q_y(r) = \delta_{Hd}, Q(r^*, q_x(r^*))q_x(r^*) = \delta_{Hd}. \quad (25)$$

Здесь  $x = \pm d$ ,  $x = \pm d^*$  – координаты точек, где образуется трещина, соответственно.

В результате численного расчета найдена длина зон предразрушения, усилия в связях и сдвиг противоположенных берегов зон предразрушения от параметра нагрузки  $\tau_{xy}^\infty$ .

На рис. 2 представлены графики зависимости относительной длины зоны предразрушения  $\ell_* = (\ell - a)/\lambda$  от безразмерного значения внешнего нагружения  $\tau_{xy}^\infty/\tau_*$  для различных значений радиуса отверстий (кривые 1–4): 1 –  $\lambda = 0.2$ ; 2 –  $\lambda = 0.3$ ; 3 –  $\lambda = 0.4$ ; 4 –  $\lambda = 0.5$ .

На рис. 3. приведена зависимость усилий в связях  $q_x/\tau_{xy}^\infty$  вдоль зоны предразрушения от безразмерной координаты  $x = (\ell + a)/2 + x'(\ell - a)/2$  для различных значений радиуса отверстий:  $\lambda = 0.2–0.5$  (кривые 1–4).

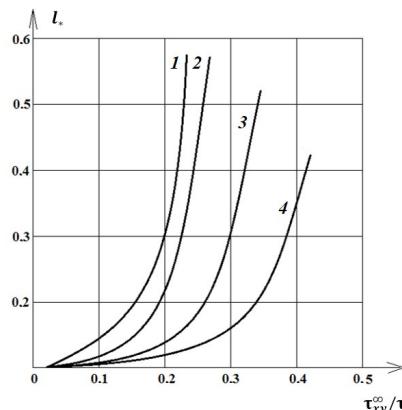


Рис. 2. Зависимости относительной длины зоны предразрушения  $\ell_* = (\ell - a)/\lambda$  от безразмерного значения внешнего нагружения  $\tau_{xy}^\infty/\tau_*$  для некоторых значений радиуса отверстий  $\lambda = 0.2–0.5$  (кривые 1–4).

Совместное решение разрешающей алгебраической системы и условий (25) дает возможность (при заданных характеристиках трещиностойкости материала) определить критическую величину внешней нагрузки, размеры зон предразрушения для состояния предельного равновесия, при которых происходит появление трещины.

На основании полученных численных результатов на рис. 4 построены графики зависимости критической нагрузки  $\tau^* = \tau_{xy}^\infty / \tau_*$  от расстояния  $a_* = a - \lambda$  для зоны предразрушения, коллинеарных оси абсцисс при  $\lambda = 0.3$ .

На рис. 5 представлена зависимость критической нагрузки  $\tau^*$  от изменения длины зоны предразрушения  $\ell_* = \ell - a$  для  $\lambda = 0.3$ ,  $a_* = 0.05$ .

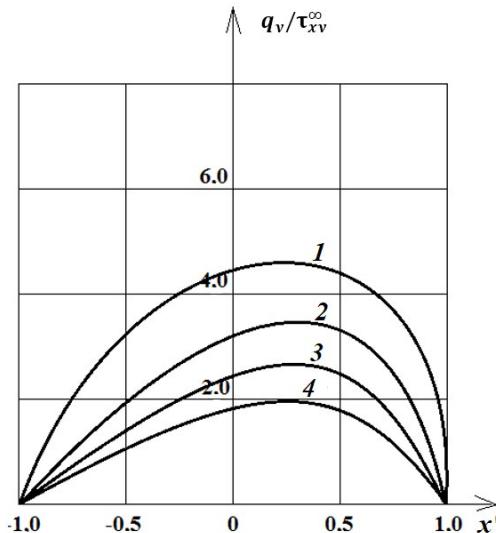


Рис. 3. Зависимости распределения касательных напряжений в связях  $q_x / \tau_{xy}^\infty$  вдоль зоны предразрушения для различных значений радиуса отверстий:  $\lambda = 0.2-0.5$  (кривые 1-4).

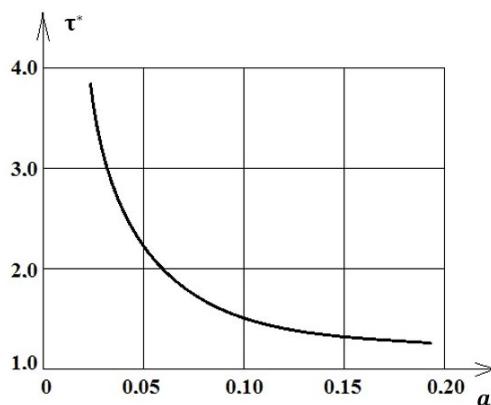


Рис. 4. Зависимость критической нагрузки  $\tau^* = \tau_{xy}^\infty / \tau_*$  от расстояния  $a_* = a - \lambda$  при  $\lambda = 0.3$ .

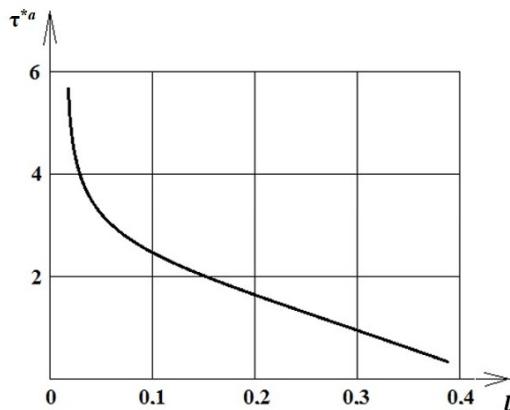


Рис. 5. Зависимость критической нагрузки  $\tau^{*a} = \tau_{xy}^{\infty} / \tau_*$  при изменении длины зоны предразрушения  $\ell_* = \ell - a$  при  $\lambda = 0.3$ ,  $a_* = 0.05$ .

Анализ предельно равновесного состояния тела с периодической системой жестких включений и берегами зон предразрушения со связями между берегами при поперечном сдвиге, сводится к параметрическому исследованию разрешающей алгебраической системы (17), (18), (21), (22)–(24) и деформационного критерия разрушения (25) при различных законах деформирования межчастичных связей материала, упругих постоянных и геометрических характеристиках перфорированного тела. Непосредственно из решения полученных алгебраических систем определяются усилия в связях и сдвиг берегов зон предразрушения. Модель зарождения трещины со связями между берегами позволяет исследовать основные закономерности распространения усилий в связях при различных законах их деформирования, проводить анализ предельного равновесия среды с зоной предразрушения с учетом деформационного условия зарождения трещины, оценивать критическую внешнюю нагрузку и трещиностойкость материала.

Полученные соотношения позволяют исследовать предельно-равновесное состояние среды с периодической системой круговых отверстий, заполненных абсолютно жесткими включениями, спаянными вдоль обвода, и ослабленной прямолинейными зонами предразрушения со связями между берегами коллинеарных осей абсцисс и ординат неравной длины при поперечном сдвиге.

Если посмотреть на цветовую шкалу, согласно нашим настройкам, начиная с синего цвета и увеличивая его в порядке возрастания, показаны области высокого потребления. Синий цвет — это та часть, где она не ощущается, а зеленый цвет — та часть, где она начинает ощущаться. Зеленый цвет можно принять за предел, при его превышении начинает увеличиваться избыточное потребление. Красный цвет — это та часть, где высокая область потребления. Вся эта цветовая гамма рассматривается относительно друг друга. Паскаль выражается в  $\text{Н}/\text{м}^2$ . Зеленые стрелки — фиксированная часть. Остальные оси — это часть, на которую приводятся нагрузки (рис. 6). Моделирование эффекта давления дано как  $5 \text{ Н}/\text{м}^2$ .

Для изучения состояния тела с периодической системой жестких элементов и края зоны предразрушения со связями на поперечном участке между краями используется параметрическое исследование решения алгебраической системы (17), (18), (21), (22) и (24), а также различные законы деформирования межчастичных связей материала, упругость, постоянные и критерии катастрофического деформирования геометрических свойств перфорированного тела (25). Из решения задачи

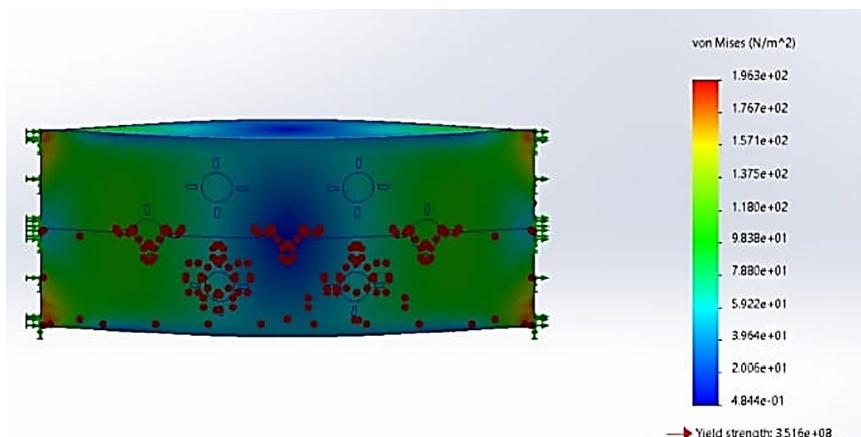


Рис. 6. 3D-моделирование проблем.

получены алгебраические системы, определены силы в соединениях предразрушаельных зон и дрейфе края. Модель зарождения трещин со связями между краями позволяет исследовать фундаментальные законы распределения сил в связях при различных законах деформирования, проанализировать их с учетом окончательного равновесия среды с зоной предразрушения, оценить деформационное состояние зарождения трещины, критические внешние напряжения и вязкость разрушения материала.

**Полученные результаты.** Согласно полученным соотношениям, мы можем предположить состояние предельного равновесия в двуякоперiodической системе с круглыми отклонениями, заполненными категорическими ограничениями, сваренными по контуру, ослабленными линейными зонами предразрушений со связями между абсциссами, коллинеарными осями и ординатами, неравномерность длины в результате поперечного сдвига.

**Финансирование.** Данная работа финансировалась за счет средств бюджета Азербайджанского государственного университета нефти и промышленности. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

**Конфликт интересов.** Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гольдштейн Р. В. Моделирование трещиностойкости композиционных материалов // Вычисл. механика сплошных сред. 2009. Т. 2. № 2. С. 22–39.
2. Ладопулос Э. Г. Сингулярные интегральные уравнения, линейная и нелинейная теория и их приложения в науке и технике. Нью-Йорк: Спрингер, 2002. 547 с.
3. Мамедов А. Т., Мехтиев Р. К. Моделирование волокнистого композита, армированного однонаправленными ортотропными волокнами, ослабленного линейными трещинами при продольном сдвиге // Механика композиционных материалов и конструкций. 2017. № 4. С. 579–591.
4. Мехтиев Р. К., Джазарова С. А., Абдулазимова Е. А. Взаимодействие двуякоперiodической системы ортотропных включений и линейных трещин при поперечном сдвиге Мендзына-родово czasopismo naukowe // Коллоквиум-журнал. 2018. № 2. С. 4104–4126.
5. Мирсалимов В. М. Безразмерные упругопластические задачи. Москва: Наука, 1987. 256 с.
6. Мусхелишвили Н. И. Некоторые фундаментальные вопросы математической теории упругости. Москва: Наука, 1966. 707 с.

7. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 443 с.
8. Вагари А. Р., Мирсалимов В. М. Зарождение трещин в перфорированном тепловыделяющем массиве, упругие свойства которого зависят от температуры // Прикладная механика и техническая физика. 2012. № 4. С. 138–148.
9. Zolgarain E. Crack formation under the influence of cylindrical bodies // Acta Polytechnica Hungarica. 2012. № 2. С. 169–183.
10. Мехтиев Р. К. Продольное скольжение тел сложной конструкции, ослабленных прямолинейными трещинами // Строительная механика и расчет конструкций. 2017. № 5. С. 69–72.
11. Бабанлы М. Б., Гурбанов Н. А., Мехтиев Р. К. Образование и рост трещин в гибридных FML-нанокомпозитных материалах с алюминиевой матрицей 7075-T6 // Прогресс физики металлов. 2022. № 3. С. 489–509.
12. Babanli M., Mekhtiyev R., Gubanov N. et al. Cracks in hybrid fiber metal laminated nanocomposites under uniaxial tension // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2022. V. 63 (5). P. 876–883.  
<https://doi.org/10.1134/S0021894422050170>
13. Бабанлы М., Турен Ю., Гурбанов Н., Мехтиев Р., Аскин М., Исмаилов М. Теория и эксперимент в прогнозировании прочности гибридных волокнистых металлических ламинатов // Журнал прикладной и вычислительной механики. 2023. № 4. С. 989–999.