

---

---

МЕХАНИКА МАШИН

---

---

УДК 534.1

ВИБРАЦИОННЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ  
ПРИ УСТАНОВКЕ НЕСКОЛЬКИХ РОТОРОВ  
НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

© 2025 г. Л. Я. Банах<sup>1,\*</sup>, О. В. Бармина<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт машиноведения им. А. А. Благонравова, Москва, Россия

\*e-mail: banl@inbox.ru

Поступила в редакцию 11.09.2024 г.

После доработки 10.10.2024. г.

Принята к публикации 20.10.2024 г.

Исследуются колебания, возникающие в системе при установке на упругом основании нескольких роторов, имеющих небольшой разброс динамических характеристик. В качестве основания рассматриваются симметричные рамные конструкции, имеющие как линейные, так и нелинейные упругие характеристики. Показано, что в таких системах вследствие малой асимметрии происходит взаимодействие различных форм колебаний, а при определенных скоростях вращения роторов возникают неустойчивые резонансные режимы с резкими скачками амплитуд колебаний. Анализируется система, состоящая из 4-х роторов, установленных на упругой квадратной амортизированной раме. Найдены условия возникновения неустойчивых режимов и наиболее опасные скорости вращения роторов. Приводятся расчетные и теоретические результаты. Для аналитических исследований симметричной системы используется математический аппарат теории представления групп симметрии.

**Ключевые слова:** колебания, роторы, влияние асимметрии, неустойчивость, нелинейные системы, теория групп

DOI: 10.31857/S0235711925010054, EDN: EQUOZ

**Постановка задачи.** На практике работающее оборудование, такое как роторы, устанавливается, как правило, на своих амортизаторах на упругом фундаменте. В статье рассматриваются динамические процессы в системе, состоящей из нескольких роторов на упругом основании. Обычно даже одинаковое оборудование имеет некоторый разброс параметров вследствие технологических погрешностей, как например небольшое отличие в жесткости амортизаторов. Такие роторы далее назовем, следуя терминологии [1], почти одинаковыми. Если бы основание было абсолютно жестким, вибрация роторов происходила бы независимо друг от друга со своими близкими частотами. Но, вследствие упругости основания через фундамент происходит перекачка энергии, и вся система в целом уже является слабосвязанной. Это приводит к сложным динамическим процессам и взаимодействию различных форм колебаний, в том числе и к режиму биений. Достаточно часто в инженерной практике в качестве фундамента используются симметричные рамные конструкции, и при этом имеющие нелинейные упругие характеристики, что привносит свою специфику в динамику системы. В настоящей статье рассматривается колебание системы из 4-х почти одинаковых роторов, расположенных симметрично на квадратной раме, име-

ющей как линейные, так и нелинейные упругие характеристики. Для получения аналитических результатов используется математический аппарат теории представления групп симметрии [2–8].

**Вибрационные взаимодействия при установке почти одинаковых роторов на упругом основании.** Исследуем вибрационные взаимодействия в системе, составленной из несбалансированных роторов, симметрично расположенных на своих амортизаторах на упругой амортизированной квадратной раме (рис. 1). Роторы вращаются с одинаковой скоростью  $\omega$  и имеют небольшой разброс упругих характеристик амортизаторов  $k_j = k \pm \Delta k_j$ ,  $\Delta k_j/k = \delta \ll 1$  ( $j = 1, \dots, 4$ ). Рассматриваются колебания системы вдоль вертикальной оси  $z$  при вращении несбалансированных роторов со скоростью  $\omega$ . Предполагаем, что жесткость участков рамы между узлами составляет  $K(z)$  и также может быть нелинейной.

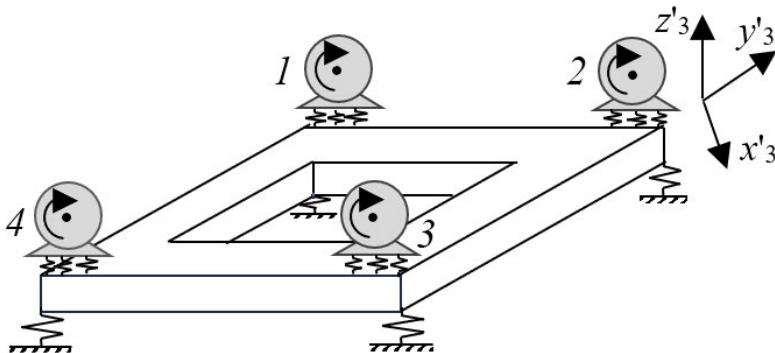


Рис. 1. Квадратная амортизированная рама с установленным роторами 1–4.

Собственные колебания таких систем, в том числе и нелинейных, были рассмотрены в [8] с помощью групповых подходов. Здесь мы исследуем вынужденные колебания. Для составления уравнений движения, как и в [8] используем локальную систему координат  $(x_i, y_i, z_i)$  ( $i = 1, \dots, 4$ ), симметричную относительно каждого узла (рис. 1): ось  $z$  направлена по биссектрисе соответствующего узла и для каждого последующего узла оси координат поворачиваются на угол, равный  $2\pi/n$  ( $n = 4$ ). Уравнения колебаний симметричной системы в этих осях приобретают достаточно простой вид, удобный для аналитических исследований. Так, матрица жесткости имеет вид

$$\mathbf{K}_4 = \begin{bmatrix} K_\Sigma + k_{1\text{ам}} & -K & -K & -K \\ -K & K_\Sigma + k_{2\text{ам}} & -K & -K \\ -K & -K & K_\Sigma + k_{3\text{ам}} & -K \\ -K & -K & -K & K_\Sigma + k_{4\text{ам}} \end{bmatrix},$$

symm

где  $K_\Sigma = K + K_{\text{ам}}$  — суммарная жесткость основания;  $K_{\text{ам}}$  — жесткость амортизаторов под основанием;  $k_{i\text{ам}}$  — жесткость амортизаторов  $i$ -го объекта ( $i = 1, \dots, 4$ );  $m$  — масса ротора.

Рассмотрим вначале случай линейной упругой характеристики рамы. Матрицу демпфирования  $\mathbf{F}$  положим пропорциональной матрице жесткости, т.е.  $\mathbf{F} = \eta \mathbf{K}_4$ .

В этом случае удобно использовать комплексные переменные [9]. Тогда для гармонических колебаний запишем

$$\mathbf{K}_4 \mathbf{z} + \mathbf{F}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{K}_4(1 + i\omega\eta)\mathbf{z} = \bar{\mathbf{K}}_4 \mathbf{z}, \quad \bar{\mathbf{K}}_4 = \mathbf{K}_4(1 + i\omega\eta).$$

Уравнения вынужденных колебаний имеют вид

$$\mathbf{D}_4 = \begin{bmatrix} -m\omega^2 + \bar{K}_\Sigma + \bar{k}_{1\text{am}} & -\bar{K} & & -\bar{K} \\ & -m\omega^2 + \bar{K}_\Sigma + \bar{k}_{2\text{am}} & -\bar{K} & \\ & & -m\omega^2 + \bar{K}_\Sigma + \bar{k}_{3\text{am}} & -\bar{K} \\ \text{symm} & & & -m\omega^2 + \bar{K}_\Sigma + \bar{k}_{14\text{am}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_1 \\ z_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Pe^{i\omega t} \\ Pe^{i\omega t} \\ Pe^{i\omega t} \\ Pe^{i\omega t} \end{bmatrix},$$

$$\bar{K}_\Sigma = K_\Sigma(1 + i\omega\eta), \bar{k}_{j\text{am}} = k_{j\text{am}}(1 + i\omega\eta), (j = 1, \dots, 4), \bar{K} = K(1 + i\omega\eta). \quad (1)$$

Предположим вначале, что все амортизаторы, на которых установлены роторы, одинаковы:  $\Delta k_i = 0$ . В этом случае система становится строго симметричной. Используем теперь проективные операторы симметрии [3, 5–8]. Для симметрии типа квадрата этот оператор следующий:

$$\mathbf{P}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Каждому оператору симметрии соответствуют базисные векторы  $\mathbf{V} = \mathbf{Pz}$ , которые по существу определяют формы колебаний. В нашем случае это следующие векторы:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 : z_1 = z_2 = z_3 = z_4, \\ \mathbf{v}_2 : z_1 = -z_2 = -z_3 = z_4, \\ \mathbf{v}_3 : z_1 = z_2 = -z_3 = -z_4, \\ \mathbf{v}_4 : z_1 = -z_2 = z_3 = -z_4. \end{cases} \quad (3)$$

Применяя групповое преобразование  $\mathbf{P}_4$  (2), образуем матрицу  $\mathbf{D}_4^* = \mathbf{P}_4^{\text{tr}} \mathbf{D}_4 \mathbf{P}_4$ . Если все амортизаторы имеют одинаковую жесткость, то система становится строго симметричной и матрица  $\mathbf{D}_4^*$  распадается на независимые блоки

$$\mathbf{D}_4^* = \mathbf{P}_4^{\text{tr}} \mathbf{D}_4 \mathbf{P}_4 = \begin{bmatrix} d_{11}^* & & & \\ & d_{22}^* & 0 & \\ & 0 & d_{33}^* & \\ & & & d_{44}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Pe^{i\omega t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$d_{11}^* = -m\omega^2 + \bar{K}_{\text{am}} + \bar{k}_{\text{am}} - \bar{K}, \quad d_{22}^* = d_{33}^* = -m\omega^2 + \bar{K}_{\text{am}} + \bar{k}_{\text{am}} + \bar{K}, \\ d_{44}^* = -m\omega^2 + \bar{K}_{\text{am}} + \bar{k}_{\text{am}} + 3\bar{K}.$$

Как следует из (3): 1) вектор  $\mathbf{v}_1$  и соответствующий блок  $d_{11}^*$  в (4) описывают синфазное перемещение всех роторов. Внешние силы входят только в этот блок, т.е. возбуждаются только синхронные колебания, в то время как все остальные формы колебаний не возбуждаются внешней силой; 2) вектор  $\mathbf{v}_4$  и блок  $d_{44}^*$  описывают перемещение всех роторов в противофазе; 3) векторы  $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  и блоки  $d_{22}^*, d_{33}^*$  описывают поворотные колебания рамы и роторов относительно взаимно-перпендикулярных осей  $x, y$  соответственно; они имеют кратные корни, что достаточно очевидно из физических соображений.

Поскольку матрица  $\mathbf{D}_4^*$  распадается на независимые диагональные блоки, то все описанные выше поступательные и поворотные формы колебаний при сделанных предположениях являются независимыми.

### Возникновение неустойчивых режимов при нарушении симметрии.

Будем теперь считать, что имеется небольшой разброс жесткостей амортизаторов:  $k_{iam} = k \pm \Delta_i$ ,  $\Delta_i/k = \delta \ll 1$  ( $i = 1, \dots, 4$ ). Тогда система перестает быть строго симметричной и в матрице  $\mathbf{D}_{4\epsilon}^*$  теперь появятся малые добавки  $\delta_i$ , и после выполнения умножения  $\mathbf{P}_4^{\text{tr}} \mathbf{D}_{4\epsilon}^* \mathbf{P}_4$  найдем:

$$\mathbf{D}_{4\epsilon}^* = \mathbf{P}_4^{\text{tr}} \mathbf{D}_{4\epsilon} \mathbf{P}_4 = \begin{bmatrix} D_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \delta_{14} \\ \delta_{21} & D_{22} & \delta_{21} & \delta_{24} \\ \delta_{31} & \delta_{21} & D_{33} & \delta_{34} \\ \delta_{41} & \delta_{42} & \delta_{43} & D_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Pe^{i\omega t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Из (5) видно, что все диагональные блоки теперь связаны между собой; то есть формы колебаний уже не являются независимыми. Кроме того, при вынужденных колебаниях, несмотря на то что на каждый узел рамы производятся одинаковые воздействия с амплитудой  $P$  как по величине, так и по направлению, колебания системы не будут поступательными, возникают связанные поворотно-поступательные колебания.

Малые коэффициенты  $\delta$  в (5) отражают слабые взаимодействия между диагональными блоками и соответствующими им формами колебаний. Степень взаимодействия определяют безразмерные коэффициенты энергетической связи [7, 8]

$$\alpha_{ij}^{pr} = \frac{(\mathbf{h}_i^p)^T \mathbf{K}_{ij} \mathbf{h}_j^r}{(\lambda_i^{(p)} \lambda_j^{(r)})^{1/2}}, \quad p = 1, \dots, n_i, \quad r = 1, \dots, n_j,$$

где  $\mathbf{h}_i$ ,  $\lambda_i$  — собственные векторы и собственные частоты  $i$ -го диагонального блока;  $\mathbf{K}_{ij}$  — матрица жесткости связи между блоками  $i$  и  $j$ .

В [7, 8] показано, что при отсутствии кратных собственных частот поправки для частот и собственных векторов имеют порядок  $\epsilon$ . Однако, в случае кратных собственных частот  $\lambda_i = \lambda_{i+1}$  происходит их расслоение

$$\lambda_{i,i+1} = \lambda_{i0} \pm \alpha_{is} \Delta \lambda + o(\epsilon^2), \quad \mathbf{h}_i = \mathbf{h}_i \pm \mathbf{h}_{i+1} + \epsilon s_{ij} \mathbf{h}_i + o(\epsilon). \quad (6)$$

Собственные векторы при этом резко меняются и возникают неустойчивые резонансные поворотные колебания рамы вокруг взаимно перпендикулярных осей с близкими частотами, что и вызывает режим биений при собственных колебаниях.

**Пример расчета.** В качестве примера рассмотрим колебания квадратной рамы с установленными на ней почти одинаковыми роторами (рис. 1). Параметры этой системы следующие: рама образована балочными элементами, жесткость которых составляет  $K = 1 \cdot 10^6$  Н/м, жесткость амортизаторов  $k_{iam} = 0.3 \cdot 10^5$  Н/м. Жесткость амортизаторов, на которых установлена рама,  $0.7 \cdot 10^5$  Н/м. Инерционные элементы  $M = 10$  кг полагаем расположеными в узлах. Собственные частоты симметричной системы:  $v$  (Гц): 50.3; 87.0; 87.0; 112.5; собственные формы совпадают с (3). Расчеты проводились с помощью программы Matrixcalc.org.

Предположим теперь, что имеется разброс жесткостных параметров амортизаторов: суммарная жесткость 2-го узла увеличилась на 3%, 3-го узла уменьшилась на 3%, а 4-го узла увеличилась на 6%.

Собственные частоты этой системы с асимметрией жесткостных параметров  $v$  (Гц): 51.3; 86.0; 89.3; 113.1.

Как видим, в соответствии с (6) происходит расслоение кратных частот. При этом наблюдается резкое изменение амплитуд колебаний при незначительном изменении

частоты возбуждения. Это иллюстрирует рис. 2, на котором представлены амплитуды колебаний роторов 1–3 при изменении частоты возмущающей силы в малом диапазоне 85–91 Гц. (амплитуды колебаний ротора 4 не представлены, чтобы не загромождать рисунок).

На рис. 3 представлены амплитуды колебаний роторов 1–4 на частотах 85 Гц и 89 Гц.

Коэффициент демпфирования  $\eta = 10^3$  с. Как видно из рис. 3, несмотря на то что возмущающие силы в каждом узле равны как по величине, так и по направлению, колебания системы не являются поступательными, а представляют собой связанные продольно-поворотные колебания.

**Колебания объектов на раме, имеющей нелинейные упругие характеристики.** В [7] показано, что при анализе собственных колебаний симметричных систем справедливо использование групповых операторов также и в случае нелинейных систем с нечетной функцией нелинейности.

Понятие формы колебаний нелинейной системы ввел Р. М. Розенберг [10]. Он также выделил класс нелинейных систем, допускающих прямолинейные нормальныес формы колебаний, к которым, в частности, относятся симметричные системы

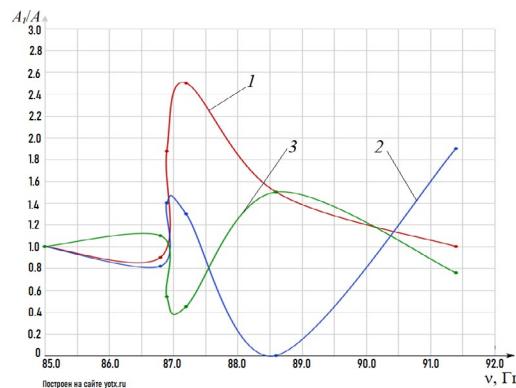


Рис. 2. Амплитуды колебаний роторов 1–3 при изменении частоты возмущающей силы в диапазоне 85–91 Гц: красным цветом 1 отмечены амплитуды колебаний 1-го ротора, синим 2 – 2-го ротора, зеленым 3 – 3-го ротора.

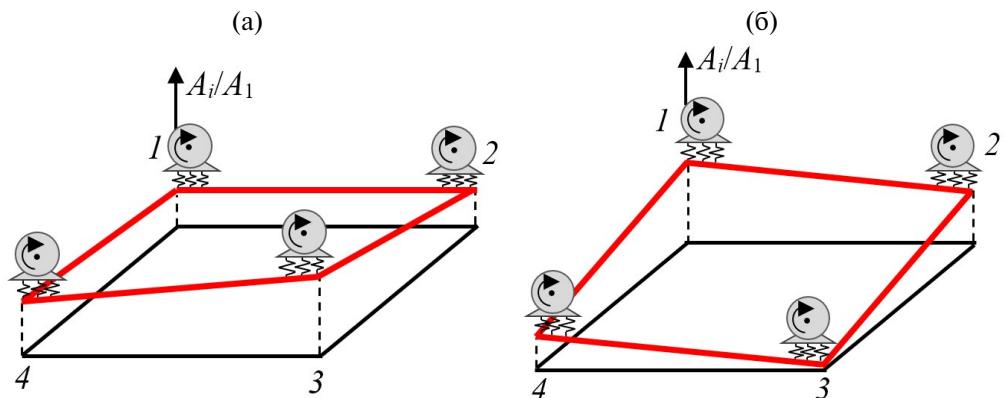


Рис. 3. Амплитуды колебаний асимметричной рамы: (а) – возбуждение с частотой  $v = 85$  Гц; (б) – возбуждение с частотой  $v = 89$  Гц.

с потенциальной энергией. Проблеме нормальных колебаний в нелинейных системах посвящены также работы [11–14].

Предположим теперь, что жесткость амортизаторов  $f_{ii}(z_i)$ , а также жесткость участков рамы  $f_{i(i+1)}(z_i - z_{i-1})$  между узлами  $i$  и  $(i+1)$  является нелинейной начальной функцией  $z$  ( $i = 1, \dots, 4$ ), т.е.  $f_{i(i+1)}(-z) = -f_{i(i+1)}(z)$ .

Уравнения колебаний рассматриваемой системы в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} m\ddot{z}_1 &= f_{11}(z_1) - f_{12}(z_1 - z_2) - f_{12}(z_1 - z_4) + P \sin \omega t; \\ m\ddot{z}_2 &= f_{11}(z_2) - f_{12}(z_2 - z_1) - f_{12}(z_2 - z_3) + P \sin \omega t; \\ m\ddot{z}_3 &= f_{11}(z_3) - f_{12}(z_3 - z_2) - f_{12}(z_3 - z_4) + P \sin \omega t; \\ m\ddot{z}_4 &= f_{11}(z_4) - f_{12}(z_4 - z_3) - f_{12}(z_4 - z_1) + P \sin \omega t. \end{aligned}$$

Применим далее к (7)–(10) оператор  $P_4$  (2), найдем

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{z}_1 + m\ddot{z}_2 + m\ddot{z}_3 + m\ddot{z}_4 &= f_{11}(z_1) + f_{11}(z_2) + f_{11}(z_3) + f_{11}(z_4) - f_{12}(z_1 - z_2) - f_{12}(z_1 - z_4) - \\ &- f_{12}(z_2 - z_1) - f_{12}(z_2 - z_3) - f_{12}(z_3 - x_2) - f_{12}(z_3 - z_4) - f_{12}(z_4 - z_3) - f_{12}(z_4 - z_1) + P \sin \omega t, \\ m\ddot{z}_1 - m\ddot{z}_2 - m\ddot{z}_3 + m\ddot{z}_4 &= f_{11}(z_1) - f_{11}(z_2) - f_{11}(z_3) + f_{11}(z_4) - f_{12}(z_1 - z_2) - f_{12}(z_1 - z_4) + \\ &+ f_{12}(z_2 - z_1) + f_{12}(z_2 - z_3) + f_{12}(z_3 - z_2) + f_{12}(z_5 - z_4) - f_{12}(z_4 - z_3) - f_{12}(z_4 - z_1), \\ m\ddot{z}_1 + m\ddot{z}_2 - m\ddot{z}_3 - m\ddot{z}_4 &= f_{11}(z_1) + f_{11}(z_2) - f_{11}(z_3) - f_{11}(z_4) - f_{12}(z_1 - z_2) - f_{12}(z_1 - z_4) - \\ &- f_{12}(z_2 - z_1) - f_{12}(z_2 - z_3) + f_{12}(z_3 - z_2) + f_{12}(z_3 - z_4) + f_{12}(z_4 - z_3) + f_{12}(z_4 - z_1), \\ m\ddot{z}_1 - m\ddot{z}_2 + m\ddot{z}_3 - m\ddot{z}_4 &= f_{11}(z_1) + f_{11}(z_2) - f_{11}(z_3) - f_{11}(z_4) - f_{12}(z_1 - z_2) - f_{12}(z_1 - z_4) + \\ &+ f_{12}(z_2 - z_1) + f_{12}(z_2 - z_3) - f_{12}(z_3 - z_2) - f_{12}(z_3 - z_4) + f_{12}(z_4 - z_3) + f_{12}(z_4 - z_1). \end{aligned} \right\}$$

Подставляя последовательно базисные векторы (4) в уравнения (11), складывая затем полученные уравнения и учитывая нечетность функций  $f_{i(i+1)}(z)$  и ортогональность базисных векторов, найдем аналогично [7] эквивалентную систему уравнений (12) уже для переменных  $v_i$  – базисных векторов (4):

$$\begin{aligned} m\ddot{v}_1 &= f_{11}(v_1) + P \sin \omega t, \\ m\ddot{v}_2 &= f_{11}(v_2) - 0.5f_{12}(2v_2) - 0.5f_{12}(2v_3), \\ m\ddot{v}_3 &= f_{11}(v_3) - 0.5f_{12}(2v_2) - 0.5f_{12}(2v_3), \\ m\ddot{v}_4 &= f_{11}(v_4) - 2f_{12}(2v_4). \end{aligned} \tag{12}$$

Таким образом, получили несвязанные между собой нелинейные уравнения (12) для каждой переменной в отдельности, т.е. поступательные и поворотные формы колебания не связаны между собой, аналогично линейной системе, рассмотренной выше. Второе и третье уравнения, описывающие поворотные формы колебаний, оказались связанными в силу неортогональности базисных векторов (4). Из (12) видно, что, как и в случае линейной системы, внешние силы  $P \sin \omega t$  возбуждают только синхронные колебания.

Легко видеть, что приведенные выше преобразования нелинейных уравнений (7)–(10) фактически эквивалентны матричному умножению (4) для линейных систем.

Если в системе окажется небольшой разброс параметров жесткостей амортизаторов, то в уравнения колебаний (7)–(10) войдут малые члены, и поступательные и поворотные формы колебаний окажутся связанными. В этом случае вследствие нелинейности можно ожидать появления также и субгармонических резонансных режимов.

**Выводы.** Исследуются колебания, возникающие в системе при установке на упругом основании роторов, имеющих небольшой разброс параметров. В качестве основания рассматриваются симметричные рамные конструкции, имеющие как линейные,

так и нелинейные упругие характеристики. Анализируется система, состоящая из роторов, установленных на квадратной амортизированной раме. Показано, что вследствие небольшой асимметрии, несмотря на синхронное возбуждение, в системе происходят асимметричные связанные продольно-поперечные колебания. В определенных частотных диапазонах возникают неустойчивые режимы, характеризующиеся резким скачкообразным изменением амплитуд колебаний. Найдены наиболее опасные скорости вращения роторов. Исследуются также системы, имеющие нелинейные упругие характеристики с нечетной функцией нелинейности. Приводятся расчетные примеры, подтверждающие теоретические результаты. Для аналитических исследований используется математический аппарат теории представления групп симметрии.

**Финансирование.** Данная работа финансировалась за счет средств бюджета ИМАШ РАН. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

**Конфликт интересов.** Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ланда П. С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. 360 с.
2. *Любарский Г. Я.* Теория групп и ее применение в физике. М.: Гостехиздат, 1957. 356 с.
3. *Хаммермеш М.* Теория групп и ее применение к физическим проблемам. М.: Мир, 2002. 588 с.
4. *Zlokovic G. M.* Group Theory and G-vector Spaces in Structural Analysis: Vibration, Stability and Status. New York: Halsted Press, 1989. 283 p.
5. *Dong B., Parker R. G.* Vibration of multi-stage systems with arbitrary symmetry of stages: A group theory approach // *J. of Sound and Vibration.* 2022. V. 524. 116738. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116738>
6. *Zingoni A.* Group-theoretic exploitations of symmetry in computational solid and structural mechanics // *Int. J. Numer. Meth. Engng* 2009. V. 79 (3). P. 253–289. <https://doi.org/10.1002/nme.2576>
7. *Banakh L. Ya., Kempner M. L.* Vibrations of Mechanical Systems with Regular Structure. Heidelberg, New York, London: Springer, 2010. 261 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-03126-7>
8. *Banakh L.* Vibrations in Systems Possessing Geometric Symmetry: Effect of Asymmetry // *J. of Mach. Manuf. and Reliab.* 2024. V. 53 (5). P. 422–431. <https://doi.org/10.1134/S1052618824700833>
9. *Диментберг Ф. М.* Изгибные колебания вращающихся валов. М.: Изд. АН СССР, 1959. 247 с.
10. *Rosenberg R. M., Hsu C. S.* On the Geometrization of Normal Vibrations of Nonlinear Systems Having Many Degrees of Freedom // Труды международного симпозиума по нелинейным колебаниям. Киев: Изд-во АН УССР. 1963. Т. 1. С. 380–416.
11. *Маневич Л. И., Михлин Ю. В., Пилипчук В. Н.* Метод нормальных колебаний для существенно нелинейных систем. М.: Наука, 1989. 216 с.
12. *Маневич Л. И., Пинский М. А.* О нормальных формах колебаний в нелинейных системах с двумя степенями свободы // Прикладная механика. 1972. Т. 8. Вып. 3. С. 83–90.
13. *Блакъер О.* Анализ нелинейных систем. М.: Мир, 1969. 400 с.
14. *Брюно А. Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973. 253 с.