

---

---

**МЕХАНИКА МАШИН**

---

---

УДК 621.833.5

**КИНЕМАТИКА ДВУХРЯДНОЙ ПЛАНЕТАРНОЙ ПЕРЕДАЧИ  
ВНУТРЕННЕГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ С ОВАЛЬНЫМИ ШЕСТЕРНЯМИ  
НА САТЕЛЛИТЕ****© 2025 г. А. А. Приходько<sup>1, \*</sup>, Г. В. Курапов<sup>1</sup>,  
Э. Ю. Азизов<sup>1</sup>, А. В. Новицкий<sup>1</sup>***<sup>1</sup>Кубанский государственный технологический университет, Краснодар, Россия  
\*e-mail: sannic92@gmail.com*

Поступила в редакцию 07.06.2024 г.

После доработки 16.10.2024 г.

Принята к публикации 20.10.2024 г.

Механические передачи с некруглыми зубчатыми колесами вызывают интерес исследователей, изобретателей и инженеров вследствие высокой компактности таких механизмов, а также реализации широкого спектра передаточных функций. В статье исследуется кинематика планетарной передачи внутреннего зацепления с овальными зубчатыми колесами, которая позволяет реализовать возвратно-вращательное движение выходного вала. Построена кинематическая модель механизма, определен закон движения в виде аналога скорости и функции положения выходного звена. Разработан экспериментальный стенд предлагаемой планетарной передачи, на базе которого исследованы функции положения для трех вариантов механизма с различными кинематическими параметрами. Статистический анализ ошибок измерения показал адекватность построенной кинематической модели, что позволяет ее использовать в дальнейшем при динамических, силовых исследованиях и проектировании машин на базе предложенной планетарной передачи.

*Ключевые слова:* планетарный механизм, овальные зубчатые колеса, кинематический анализ, функция положения, статистический анализ, неопределенность измерения, доверительный интервал

**DOI:** 10.31857/S0235711925010048, **EDN:** EQQSNC

Некруглые зубчатые колеса известны со времен Ренессанса, их первые упоминания встречаются в трудах итальянских ученых-механиков Джованни Донди (1330–1388) и Леонардо да Винчи (1452–1519). Большой вклад в становление и развитие данного направления в XIX веке внесли Фердинанд Редтенбахер (1809–1863) и его ученик Франц Рело (1829–1905), которые создали обширную коллекцию учебных моделей передач с некруглыми зубчатыми колесами. В XX веке значительный вклад в развитие основ проектирования и изготовления некруглых зубчатых колес внес Федор Львович Литвин (1914–2017).

Передачи некруглыми колесами привлекают внимание исследователей благодаря своим преимуществам по сравнению с рычажными и кулачковыми механизмами: широким кинематическим характеристикам, позволяющим реализовывать различные неравномерные передаточные функции; высокой точности и скорости работы; компактной и надежной конструкции передачи. Несмотря на большое количество

работ в этой области [1–7], многие фундаментальные задачи остаются нерешенными, в частности, проблемы экспериментального исследования таких передач, вопросы динамического анализа и перспективы практического применения. В настоящее время наблюдается повышение интереса механиков к устройствам с некруглыми зубчатыми колесами вследствие развития технологий механической обработки [8, 9] и аддитивного производства [10], а также прикладных пакетов математического моделирования, в том числе методами конечных элементов [11, 12].

Одним из перспективных практических применений некруглых зубчатых колес является создание приводов возвратно-вращательного движения, построенных на базе планетарных передач с одной [13] или несколькими парами [3, 14] некруглых шестерен. Возвратно-вращательное движение широко применяется при автоматизации технологических процессов, высокоэффективно при перемешивании жидких сред [15], а также используется в станках-качалках для добычи нефти и других машинах.

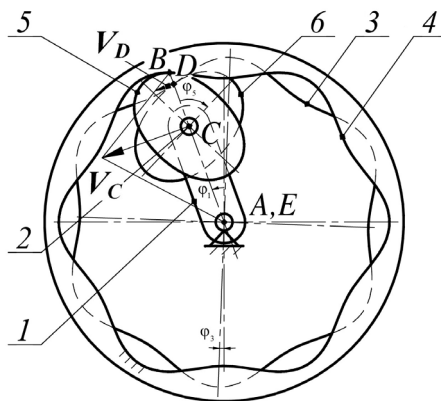
Ранее [14] была предложена и исследована новая конструкция механизма возвратно-вращательного движения на базе двухрядной планетарной передачи с двумя внутренними зацеплениями, имеющей в своем составе эллиптические шестерни на сателлите. Эллиптические шестерни с осью вращения в фокусе делительного эллипса являются самыми распространенными на сегодняшний день, однако могут быть сложны в уравнивании. Овальные зубчатые колеса лишены этого недостатка, т.к. центр масс такого колеса лежит на оси его вращения.

**Целью** настоящей статьи является кинематическое исследование планетарного механизма с двумя внутренними зацеплениями, имеющего в своем составе овальные шестерни на сателлите и позволяющего реализовать возвратно-вращательное движение выходного вала при одностороннем вращательном движении входного.

**Кинематическая модель исследуемого планетарного механизма.** Рассмотрим план скоростей планетарного механизма внутреннего зацепления с овальными шестернями на сателлите (рис. 1).

Согласно построенному плану скоростей, аналог угловой скорости выходного вала определится по формуле [14]

$$\varphi'_3 = \frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{V_D \cdot AC}{V_C \cdot DE} = \frac{BD \cdot AC}{BC \cdot DE}. \quad (1)$$



**Рис. 1.** План скоростей исследуемой планетарной передачи: 1 — водило; 2 — вал сателлита; 3 — некруглое зубчатое колесо на выходном валу; 4 — неподвижное некруглое зубчатое колесо (эпицикл); 5, 6 — овальные зубчатые колеса сателлита; A, C, E — вращательные кинематические пары; B, D — зубчатые кинематические пары.

Для определения расстояний  $BD$ ,  $BC$  и  $DE$  необходимо рассмотреть уравнение овала в полярных координатах [16, 17]:

$$\rho(\varphi) = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos 2\varphi}, \quad (2)$$

где  $\varphi$  — угол поворота от большой полуоси;  $e$  — эксцентриситет исходного эллипса, от которого образован овал [16, 17];  $a$  — большая полуось исходного эллипса.

Обозначим радиусы зацепления овальных зубчатых колес 5 и 6 следующим образом:

$$BC = \rho_5 = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos 2\varphi_5}; \quad (3)$$

$$CD = \rho_6 = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos 2\varphi_6}, \quad (4)$$

где  $\varphi_5$  и  $\varphi_6$  — углы поворота овальных зубчатых колес 5 и 6 сателлита.

Угол поворота овального зубчатого колеса 5 определится из соотношения

$$\frac{d\varphi_5}{d\varphi_1} = \frac{h + \rho_5}{\rho_5}. \quad (5)$$

Решая уравнение (5) численными или аналитическими методами, можно получить зависимость угла поворота колеса 5 и сателлита 2 от угла поворота входного вала 1.

Углы поворота колес 5 и 6 взаимосвязаны следующим образом:

$$\varphi_6 = \varphi_5 + \frac{\pi}{2}. \quad (6)$$

В соответствии с рис. 1 и с учетом принятых обозначений (3), (4), длины отрезков в уравнении (1) определяются как

$$BD = \rho_6 - \rho_5; \quad (7)$$

$$AC = EC = 2a; \quad (8)$$

$$DE = 2a - \rho_6. \quad (9)$$

Таким образом, учитывая (2)–(9), определим аналог угловой скорости выходного вала исследуемого планетарного механизма:

$$\varphi'_3 = \frac{(\rho_6 - \rho_5)2a}{\rho_5(2a - \rho_6)}. \quad (10)$$

Угол поворота выходного вала, определяющий функцию положения механизма, рассчитывается путем интегрирования (10) по углу поворота входного вала

$$\varphi_3(\varphi_1) = \int \varphi'_3 d\varphi_1. \quad (11)$$

Таким образом, уравнение (11) позволяет получить расчетную функцию положения исследуемого планетарного механизма.

В качестве примера исследуем механизмы с различными эксцентриситетами исходного эллипса, от которого образован овал: 1) вариант 1 —  $e = 0.2$ ; 2) вариант 2 —  $e = 0.25$ ; 3) вариант 3 —  $e = 0.3$ .

Используя формулу (11), построим функции положений выходного вала для предлагаемых механизмов (рис. 2), цифрами обозначены исследуемые варианты.

Как видно из графиков, исследуемый механизм позволяет реализовать возвратно-вращательное движение выходного вала, при этом амплитуда такого движения возрастает с увеличением эксцентриситета овальных зубчатых колес.

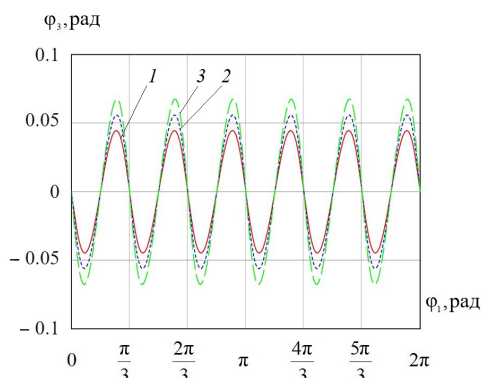


Рис. 2. Графики зависимостей  $\varphi_3(\varphi_1)$  для различных конфигураций механизма.

**Анализ функций положения исследуемых вариантов механизма.** Проведенный кинематический анализ показал реализацию требуемого вида движения выходного вала с возможностью изменения кинематических характеристик механизмов путем вариации эксцентриситетов овальных зубчатых колес. С целью проверки адекватности построенной кинематической модели, а также ее дальнейшего использования при динамическом, силовом анализе и проектировании машин на базе исследуемой передачи, проведем экспериментальное исследование кинематики на примере анализа функции положения.

Объектом экспериментального исследования является прототип планетарного механизма, детали которого (рис. 3) выполнены как методами механической обработки (валы для обеспечения соосности выполнены из стали 45), так и с помощью аддитивных технологий (корпус механизма, крепления для датчиков выполнены из PETG-пластика).

Измерительная часть стенда содержит абсолютные энкодеры для измерения углов поворота входного и выходного валов, краткие характеристики которых представлены в табл. 1.



Рис. 3. Детали исследуемого прототипа.

Таблица 1. Характеристики абсолютных энкодеров

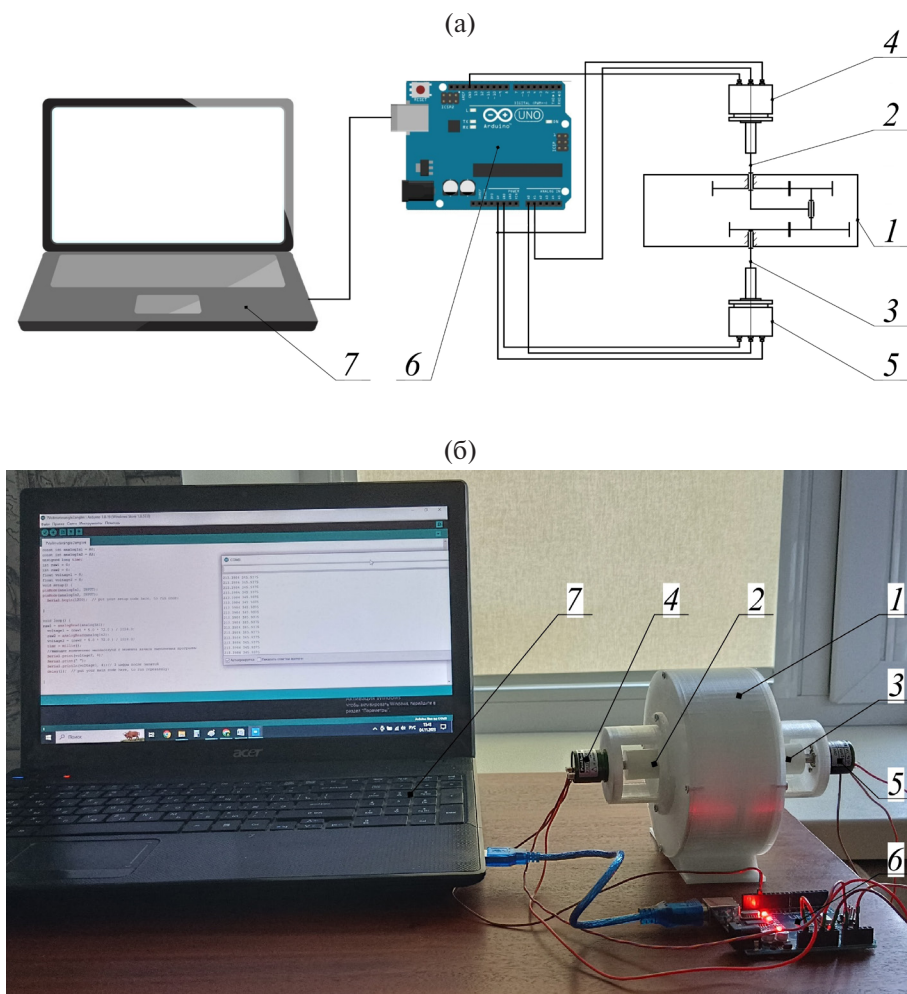
Разрешение	Линейность	Скорость чтения	Выходной сигнал	Диаметр
$360^\circ/4096 \approx 0.088^\circ$	0.3%	0.6 мс	0–5 В	22 мм

Сигнал от датчиков обрабатывается с помощью контроллера, который выполняет функцию аналого-цифрового преобразователя, а затем передается на персональный компьютер. Принципиальная схема и внешний вид экспериментального стенда показаны на рис. 4.

Исследование функции положения проводилось путем измерения углов поворота входного и выходного валов для четырех предлагаемых вариантов планетарного механизма. Анализ полученных данных и статистическая обработка выполняются в системе компьютерной математики MathCAD.

Схемы механизмов, теоретические функции положения и результаты измерений для исследуемых вариантов показаны на рис. 5.

Как видно из графиков (рис. 5), измеренные функции положения для всех вариантов механизма адекватны построенной кинематической модели. Проведем статистический анализ ошибок измерения функций положения для более детальной



**Рис. 4.** Принципиальная схема (а) и внешний вид (б) экспериментального стенда:  
1 — корпус механизма; 2 — входной вал; 3 — выходной вал; 4, 5 — датчики угла поворота;  
6 — контроллер; 7 — ПК.

оценки результатов эксперимента. Согласно [18, 19], среднее значение ошибок измерения определится по формуле

$$\bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q_k, \quad (12)$$

где  $n$  — количество независимых наблюдений  $q_k$ .

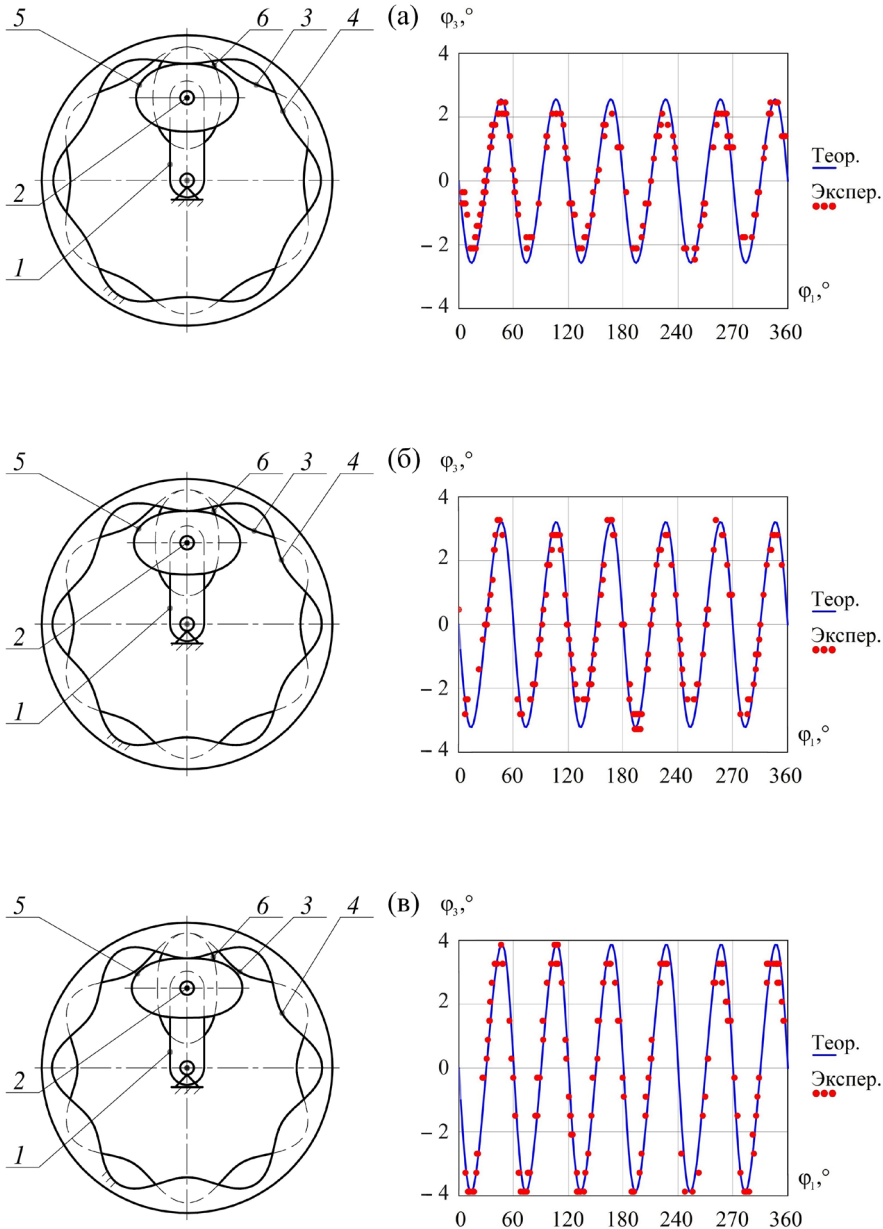


Рис. 5. Схемы механизмов, функции положений и результаты измерений:  
(а) — вариант 1; (б) — вариант 2; (в) — вариант 3.



Выборочная дисперсия определяется по формуле

$$s^2(q_k) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (q_k - \bar{q})^2. \quad (13)$$

Оценку дисперсии среднего значения получим следующим образом:

$$s^2(q) = \frac{s^2(q_k)}{n}. \quad (14)$$

Далее, определим стандартную неопределенность измерений по типу А:

$$u(q) = \sqrt{s^2(q)}. \quad (15)$$

Применяя уравнения (12)–(15) к результатам экспериментального исследования и принимая за значения  $q_k$  ошибки измерения функций положения, получим значения неопределенности измерения для каждого из вариантов механизмов. Количество измерений  $n$ , среднее значение ошибок измерения  $\bar{q}$  и неопределенность измерения  $u(q)$  для каждого варианта механизма приведены в табл. 2.

**Таблица 2.** Результаты статистического анализа ошибок измерения

Исполнение механизма	Количество измерений	Среднее значение ошибки	Неопределенность измерения
Вариант 1	189	$-0.126^\circ$	$0.03^\circ$
Вариант 2	188	$0.044^\circ$	$0.026^\circ$
Вариант 3	192	$0.136^\circ$	$0.04^\circ$

Анализ результатов эксперимента показывает адекватность построенной математической модели кинематики реальным механизмам, при этом доверительный интервал ошибок измерения при уровне достоверности 95% определяется как  $\bar{q} \pm 2u$  и составляет  $-0.126 \pm 0.06^\circ$  для варианта 1,  $0.044 \pm 0.052^\circ$  для варианта 2 и  $0.136 \pm 0.08^\circ$  для варианта 3.

**Заключение.** В качестве перспективного привода возвратно-вращательного движения предлагается планетарный механизм с внутренним зацеплением, имеющий в своем составе овальные зубчатые колеса. Кинематический анализ предложенного механизма показал реализацию возвратно-вращательного движения выходного вала с различной амплитудой, которая зависит от эксцентриситета овальных зубчатых колес.

Проведен экспериментальный анализ функций положения для трех вариантов исследуемого механизма. Статистический анализ результатов измерения показал адекватность построенной кинематической модели реальным механизмам, что позволяет ее использовать при дальнейшем проектировании и расчете машин на базе предложенной схемы планетарного механизма.

**Финансирование работы.** Исследование выполнено при финансовой поддержке Кубанского научного фонда в рамках научно-инновационного проекта № НИП-20.1/135.

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Addomine M., Figliolini G., Pennestri E. A landmark in the history of non-circular gears design: The mechanical masterpiece of Dondi's astrarium // Mechanism and Machine Theory. 2018. V. 122. P. 219–232.

2. Yu Y., Lin C., Hu Y. Study on simulation and experiment of non-circular gear surface topography in ball end milling // *The Int. J. of Advanced Manuf. Technol.* 2021. V. 114. P. 1913–1923.
3. Zheng F., Hua L., Han X., Li B., Chen D. Synthesis of indexing mechanisms with non-circular gears // *Mechanism and Machine Theory.* 2016. V. 105. P. 108–128.
4. Liu J. G., Tong Z. P., Yu G. H., Zhao X., Zhou H. L. Design and application of non-circular gear with cusp pitch curve // *Machines.* 2022. V. 10. № 11. P. 985.
5. Liu D., Zhang T., Cao Y. Multi-Joint Bionic Mechanism Based on Non-Circular Gear Drive // *Biomimetics.* 2023. T. 8. № 3. P. 272.
6. Du F., Liu J., Qi P. Research on the seedling picking trajectory error of the gear train seedling picking mechanism considering tooth backlash // *Engineering Reports.* 2024. e12840.
7. Li B., Hu J., Chen D. Rounding theory and method for the pitch curves of the variable center distance non-circular gear pair based on working conditions // *Advances in Mechanical Engineering.* 2024. V. 16. № 4.
8. Gupta K., Jain N. K. On surface integrity of miniature spur gears manufactured by wire electrical discharge machining // *The Int. J. of Advanced Manuf. Technol.* 2014. V. 72. P. 1735.
9. Gupta K., Jain N. K., Laubscher R. F. Spark erosion machining of miniature gears: a critical review // *The Int. J. of Advanced Manuf. Technol.* 2015. V. 80. P. 1863–1877.
10. Castillo C., López-Martínez J., García-Vallejo D., Blanco-Claraco J. L. Synthesis of 1-DOF mechanisms for exact regular polygonal path generation based on non-circular gear transmissions // *Mechanism and Machine Theory.* 2024. V. 198. P. 105657.
11. Madenci E., Guven I. The finite element method and applications in engineering using ANSYS. USA: Springer, 2015. 657 p.
12. Xu G., Chen J., Zhao H. Numerical calculation and experiment of coupled dynamics of the differential velocity vane pump driven by the hybrid higher-order fourier non-circular gears // *J. of Thermal Science.* 2018. V. 27. P. 285–293.
13. Prikhodko A. A., Smelyagin A. I., Tsybin A. D. Kinematics of planetary mechanisms with intermittent motion // *Procedia Engineering.* 2017. V. 206. P. 380–385.
14. Prikhod'ko A. A., Smelyagin A. I. Kinematics of a Planetary Train with Elliptical Gears with Internal Gearing // *J. of Mach. Manuf. and Reliab.* 2021. V. 50. № 5. P. 412–418.
15. Prikhod'ko A. A., Smelyagin A. I. Investigation of power consumption in a mixing device with swinging movement of the actuating element // *Chemical and Petroleum Engineering.* 2018. V. 54. № 3–4. P. 150–155.
16. Litvin F. L., Fuentes A. Gear geometry and applied theory. Cambridge University Press, 2004. 800 p.
17. Киреев С. О., Ершов Ю. В., Падалко Н. А. Определение центроид овальных шестерен // *Известия высших учебных заведений. Северо-кавказский регион. Технические науки.* 2009. № 6. С. 90–91.
18. Бараш В. Я. Неопределенность и погрешность в современной метрологии // *Законодательная и прикладная метрология.* 2009. № 5. С. 15–20.
19. Hall B. D., White D. R. An introduction to measurement uncertainty. Lower Hutt: Measurement Standards Laboratory of New Zealand, 2020. 50 p.